UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM313 - Cálculo III - Engenharia Mecânica - 2026/1
Prof. Zeca Eidam

Lista 3

✰ Superfícies parametrizadas

1. Determine uma representação paramétrica de cada uma das superfícies descritas abaixo e calcule sua área:

   (a) S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ interior ao cone $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$;

   (b) S é a parte do cilindro $x^2+z^2=1$ compreendida entre os planos $y=-1$ e $y=3$;

   (c) S é a parte do plano $z=2x+3y$ que é interior ao cilindro $x^2+y^2=16$;

   (d) S é a parte do parabolóide hiperbólico $z=y^2-x^2$ que está entre os cilindros $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$;

   (e) S é a parte do cilindro $x^2+z^2=a^2$ que está no interior do cilindro $x^2+y^2=a^2$, onde $a>0$;

   (f) S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ que está no interior do cilindro $x^2+y^2=ax$, onde $a>0$;

   (g) S é o toro obtido pela rotação da circunferência no plano xz com centro $(b,0,0)$ e raio $a<b$ em torno do eixo z;

   (h) S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ com $z \geq \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}}$.

2. Sejam $0<a<b$ e $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função positiva com derivada contínua. Determine equações paramétricas das superfícies geradas pela rotação da curva $y=f(x)$ em torno do eixo x e do eixo y. Calcule a área da superfície em cada caso.

✰ Integrais de superfície

3. Calcule as seguintes integrais de superfície:

   (a) $\displaystyle\iint_S y\,dS$, onde S é a superfície dada por $z=x+y^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2$;

   (b) $\displaystyle\iint_S x^2\,dS$, onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2=1$;

   (c) $\displaystyle\iint_S xy^2z^3\,dS$, onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2=1$;

   (d) $\displaystyle\iint_S y\,dS$, onde S é a parte do plano $3x+2y+z=6$, que está contido no primeiro octante;

(e) $\displaystyle\iint_S xz\,dS$, onde S é o triângulo com vértices (1,0,0), (1,1,1) e (0,0,2);

(f) $\displaystyle\iint_S (x^2+\sin x\cos(yz))\,dS$, onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2=1$;

(g) $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, onde S é a parte do parabolóide $z=4-x^2-y^2$ contida no primeiro octante;

(h) $\displaystyle\iint_S yz\,dS$, onde S é a parte do plano $z=y+3$ limitada pelo cilindro $x^2+y^2=1$;

(i) $\displaystyle\iint_S xy\,dS$, onde S é a fronteira da região limitada pelo cilindro $x^2+z^2=1$ e pelos planos $y=0$ e $x+y=2$;

(j) $\displaystyle\iint_S z(x^2+y^2)\,dS$, onde S é o hemisfério $x^2+y^2+z^2=4,\ z\geq 0$;

(k) $\displaystyle\iint_S xyz^4\,dS$, onde S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=1$ interior ao cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$;

(l) $\displaystyle\iint_S \sqrt{\frac{2x^2+2y^2-2}{2x^2+2y^2-1}}\,dS$, onde S é a parte de $x^2+y^2-z^2=1$ com $1\leq z\leq 3$;

(m) $\displaystyle\iint_S (x+1)\,dS$, onde S é a parte de $z=\sqrt{x^2+y^2}$ limitada por $x^2+y^2=2y$.

4. Calcule a integral de superfície $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$ para cada um dos campos de vetores $\vec{F}$ e superfícies orientadas S indicadas abaixo. Em outras palavras, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S. Quando S é uma superfície fechada, admita que S está orientada pela normal *exterior*.

   (a) $\vec{F}(x,y,z)=x^2y\vec{i}-3xy^2\vec{j}+4y^3\vec{k}$ e S é a parte do parabolóide $z=9-x^2-y^2$, com $z\geq 0$, orientada de modo que a normal no ponto (0,0,9) é $\vec{k}$;

   (b) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+xy\vec{j}+xz\vec{k}$ e S é a parte do plano $3x+2y+z=6$, interior ao cilindro $x^2+y^2=1$, orientada de modo que seu vetor normal é $\frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$;

   (c) $\vec{F}(x,y,z)=-x\vec{i}-y\vec{j}+z^2\vec{k}$ e S é a parte do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, entre os planos $z=1$ e $z=2$, orientada de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{k}<0$;

   (d) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ e S é a esfera $x^2+y^2+z^2=9$;

   (e) $\vec{F}(x,y,z)=-y\vec{i}+x\vec{j}+3z\vec{k}$ e S é o hemisfério $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, orientada de modo que a normal no ponto (0,0,4) é $\vec{k}$;

   (f) $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}-z\vec{k}$ e S consiste do parabolóide $y=x^2+z^2,\ 0\leq y\leq 1$ e do disco $x^2+z^2\leq 1,\ y=1$, orientada para fora;

   (g) $\vec{F}(x,y,z)=x\vec{i}+2y\vec{j}+3z\vec{k}$ e S é o cubo de vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$;

   (h) $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\vec{i}-(2y+1)\vec{j}+z\vec{k}$ e S é o retângulo de vértices (1,0,1), (1,0,0), (0,1,0) e (0,1,1), orientado de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{j}>0$;

   (i) $\vec{F}(x,y,z)=-yz\vec{i}$ e S é o a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ exterior ao cilindro $x^2+y^2\leq 1$, orientado de modo que a normal no ponto (2,0,0) é $\vec{i}$;

   (j) $\vec{F}(x,y,z)=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ e S é a parte da superfície $z=\sqrt{4-x}$, limitada pela superfície cilíndrica $y^2=x$, orientado de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{i}>0$;

(k) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, limitada pelo cilindro $x^2+y^2 = 2x$, orientada de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{k} < 0$;

(l) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + ye^z, y^2 + ze^x, z^2 + xe^y)$ e S é a fronteira da região limitada pelo cilindro $x^2+y^2 = 1$ entre os planos $z = 0$ e $z = x+2$, orientada pela normal exterior.

(m) $\vec{F}(x,y,z) = 3y^2z^3\vec{i} + 9x^2yz^2\vec{j} - 4xy^2\vec{k}$ e S a superfície do cubo com vértices $(\pm1,\pm1,\pm1)$, orientado pela normal exterior;

(n) $\vec{F}(x,y,z) = (-xzi + (y^3 - yz)j + z^2k)$ e S o elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, orientado pela normal exterior;

(o) $\vec{F}(x,y,z) = (x^3 + y\sin z, y^3 + z\sin x, 3z)$ e S a superfície do sólido limitado pelos hemisférios $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ e pelo plano $z = 0$, orientada pela normal exterior..

(p) $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + z\vec{k}$ e S é a parte de $x^2+y^2-2z^2 = 1$ com $0 \le z \le 1$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} \le 0$.

5. Calcule as integrais de superfície a seguir:

(a) $\iint_S xz\,dy\wedge dz + yz\,dz\wedge dx + x^2\,dx\wedge dy$, onde S é a semi-esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ $(a>0)$, $z \ge 0$, orientada segundo a normal exterior;

(b) $\iint_S x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$, onde S é a parte normal do plano $x+y+z = 2$, no primeiro octante, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{j} > 0$;

(c) $\iint_S x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z = 4-x^2-y^2$, contida no semiespaço $z \ge 2y+1$, orientada de modo que sua normal satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{k} \ge 0$.

(d) $\iint_S y^2z^2\,dy\wedge dz + x\,dz\wedge dx + y\,dx\wedge dy$, onde S é a parte da superfície $z^2 = x^2+2y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = y+3$, orientada com $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} < 0$.

(e) $\iint_S e^{z^2}\ln(z+y)\,dy\wedge dz + (x^2+z^2)\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$, onde S é a parte do parabolóide $z = 4-x^2-y^2$ limitada pelo plano $z = y+4$, orientada com $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} \ge 0$.

(f) $\iint_S x\,dy\wedge dz + yze^{z^2}\,dz\wedge dx - \dfrac{e^{z^2}}{2}\,dx\wedge dy$, onde S é a parte de $z = x^2+y^2$ limitada por $x^2+y^2 = 1$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} > 0$;

(g) $\iint_S (x^2+z^3)\,dy\wedge dz + z^5\,dz\wedge dx + (e^{x^2+y^2}+z^2)\,dx\wedge dy$, onde S é a parte de $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ interior a $z^2 = x^2+y^2$, orientada com a normal exterior;

(h) $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = e^{z^2}\cos(zy^2)\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ e S é a parte de $x^2+y^2 = 1$ limitada por $z = 0$ e $z = y+3$, orientada com a normal unitária exterior.

(i) $\iint_S dy\wedge dz + y^3\,dz\wedge dx + z^2\,dx\wedge dy$, onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2 = r^2$, orientada com a normal unitária exterior.

(j) $\iint_S dy\wedge dz + y^3\,dz\wedge dx + z^2\,dx\wedge dy$, onde S é a fronteira da região limitada por $z = 4$ e $z = x^2+y^2$.

(k) $\displaystyle\iint_S \frac{x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, onde S é a parte do elipsóide $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1, z\geq 0$, orientada com a normal unitária exterior;

6. Suponha que a superfície S seja o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, orientada de modo que sua normal unitária $\vec{N}$ tenha terceira componente não negativa. Se $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é um campo de vetores sobre S, mostre que

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \iint_D \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\right) dx\,dy.$$

7. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma$, sendo:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + 2xy\vec{j} + 3xy\vec{k}$ e γ é a fronteira da parte do plano $3x+y+z=3$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (z^2+e^{x^2})\vec{i} + (y^2+\ln(1+y^2))\vec{j} + (xy+\sin z^3)\vec{k}$ e γ é a fronteira do triângulo com vértices (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,2), orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (2z+\sin(e^{x^3}))\vec{i} + 4x\vec{j} + (5y+\sin(\sin z^2))\vec{k}$ e γ é a intersecção do plano $z=x+4$ com o cilindro $x^2+y^2=4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;

(d) $\vec{F}(x,y,z) = (x+\cos x^3)\vec{i} + y\vec{j} + (x^2-y^2+z^{100})\vec{k}$ e γ é a fronteira da parte do parabolóide $z=1-x^2-y^2$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;

(e) $\vec{F}(x,y,z) = (y+z)\vec{i} + (2x+(1+y^2)^{20})\vec{j} + (x+y+z)\vec{k}$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2+y^2=2y$ com o plano $z=y$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;

(f) $\vec{F}(x,y,z) = (y+\cos(\cos x))\vec{i} + (z+\sin(\cos y))\vec{j} + x\vec{k}$ e γ é a intersecção da esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ $(a>0)$ com o plano $x+y+z=0$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

(g) $\vec{F}(x,y,z) = (yz+\cos(\sin x), xz+\ln(1+y^4), zy)$ e γ é a intersecção das superfícies $x^2+y^2=4$ e $z=2x+3$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;

(h) $\vec{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{z^3}{1+z^2}\right) + (\sin(\ln(1+x^4)), e^{y^3}, z^2)$ e γ é a intersecção do cilindro $x^2+y^2=1$ com o plano $x+y+z=4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido horário;

(i) $\vec{F}(x,y,z) = (2xz^3, x^2y^2, 3x^2z^2) + (y,0,0)$ e γ é a intersecção das superfícies $z=\sin y+10$ e $x^2+y^2=16$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;

(j) $\vec{F}(x,y,z) = \left(x-y^2, x-z+\dfrac{y^2}{2+\sin y}, y\right)$ e γ é a intersecção do paraböide $4z=x^2+y^2$ com o cilindro $x^2+y^2=4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário;

(k) $\vec{F}(x,y,z) = (e^x \sin y, e^x \cos y - z, y)$ e γ é o bordo da superfície obtida pela rotação em torno do eixo Oz do gráfico de $z = \dfrac{1}{y^2}$, $e \le y \le e^2$. Escolha uma orientação para γ.

(l) $\vec{F}(x,y,z) = \left(\sin(\ln(1+x^2)), \dfrac{-z}{y^2+z^2} + e^{y^4}, \dfrac{y}{y^2+z^2} + \cos z^{40}\right)$ sendo γ dado pela interseção do cilindro $y^2+z^2=4$ com o plano $x = y+z$. γ é percorrido uma vez no sentido anti-horário.

(m) $\vec{F}(x,y,z) = (z+y^2, y^2+1, \ln(z^2+1)+y)$ e $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 10-2\sin t)$, $0 \le t2\pi$.

8. Calcule as integrais de linha abaixo:

(a) $\displaystyle\int_\gamma (x+y^2+\sin(x^2))dx + (y+z^2-\cos(y^2+y-1))dy + (x+z^2-17e^{-z^2})dz$ onde γ é o triângulo de vértices $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ orientado de forma que sua projeção no plano xy é percorrida no sentido anti-horário;

(b) $\displaystyle\int_\gamma (e^{-x}+x^{2017})dx + (e^x + y\sin(y^3))dy + e^z dz$ onde γ é a fronteira da parte do plano $2x+y+2z=2$ no primeiro octante, orientada de forma que sua projeção no plano xy é percorrida no sentido anti-horário;

(c) $\displaystyle\int_\gamma (yz+x^{2018})dx + (2xz-\cos y)dy + e^{xy}dz$ onde γ é a circunferência $x^2+y^2=16$, $z=5$, orientada de forma que sua projeção no plano xy é percorrida no sentido anti-horário;

(d) $\displaystyle\int_\gamma x^2 z dx + xy^2 dy + z^2 dz$ onde γ é a curva de intersecção do cilindro $x^2+y^2=9$ com o plano $x+y+z=1$, orientada de forma que sua projeção no plano xy é percorrida no sentido anti-horário;

9. Considere o campo vetorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (yz\cos(xyz) + ye^{xy} + 3x^2y, xz\cos(xyz) + xe^{xy} - x^3, xy\cos(xyz) + 2z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Verifique se $\vec{F}$ é conservativo e, em caso afirmativo, calcule um potencial para $\vec{F}$.

(b) Considere a curva $\gamma(t) = (e^{t^2-t}\cos(t-t^3), \ln(t^2-t+1) + t^{2018} - 2t, 1+t+t^2\cos(t^4-t))$, $0 \le t \le 1$. Calcule

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma.$$

(c) Calcule rot $\vec{F}$ sem fazer nenhum cálculo (adivinha quanto vai dar...). Justifique sua resposta.

(d) Considere a curva $\gamma(t) = (e^{t^2-t}\cos(t-t^3), \ln(t^2-t+1) + t^{2018} - t, t - t^2 + \sin(t^4-t))$, $0 \le t \le 1$. Calcule

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma.$$

10. Seja γ uma curva simples, fechada e plana e seja $\vec{N} = (a,b,c)$ um vetor unitário normal ao plano que contém γ. Mostre que a área da região limitada por γ é dada por

$$\frac{1}{2}\int_\gamma (bz-cy)dx + (cx-az)dy + (ay-bx)dz,$$

com γ orientada pela orientação induzida de $\vec{N}$.

11. Calcule $\iint_S (\text{rot}\vec{F}) \cdot \vec{N} dS$ sendo:

   (a) $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e S a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 5$, orientada pelo campo de vetores normais que aponta para cima;

   (b) $\vec{F}(x, y, z) = (xz,\ x - y,\ x^2 y)$ e S formada pelas 3 faces, que não estão no plano xy, do tetraedro formado pelos planos coordenados e o plano $3x + y + 3z = 6$, sendo $\vec{N}$ o campo normal exterior ao tetraedro;

   (c) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2,\ z,\ yz)$ e S a parte do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ limitada por $x^2 + y^2 = 4$ com normal que aponta para o eixo z.

12. Seja $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{|r|^3}$, onde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Calcule $\iint_S \vec{v} \cdot N dS$, onde $\vec{N}$ é a normal unitária exterior a S nos seguintes casos:

   (a) S é a esfera de raio $a > 0$ com centro na origem;

   (b) S é uma superfície fechada lisa por partes tal que a origem não pertence a S nem à região interior a S;

   (c) S é uma superfície fechada lisa por partes que contém a origem em seu interior.

13. Seja S uma superfície fechada lisa por partes e orientada pela normal exterior $\vec{N}$. Verifique as seguintes igualdades:

   (a) O volume de S é igual a $\dfrac{1}{3} \iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$

   (b) $\iint_S \text{rot}\,\vec{v} \cdot \vec{N} dS = 0$, para qualquer campo $\vec{v}$ de classe C^2 no interior de S cujo domínio contenha S.

14. Em cada caso abaixo, determine se $\vec{F}$ é ou não campo gradiente no domínio indicado. Em caso afirmativo, determine um potencial para $\vec{F}$.

   (a) $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2 + 8xy^2)\vec{i} + (3x^3 y - 3xy)\vec{j} + -(4z^2 y^2 + 2x^3 z)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$

   (b) $\vec{F}(x, y, z) = (x + z)\vec{i} - (y + z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$

   (c) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3)\vec{i} + (4 + 2y \sin x)\vec{j} + (3xz^2 + 2)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$

   (d) $\vec{F}(x, y, z) = (yz)\vec{i} + (xz)\vec{j} + (xy)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$

   (e) $\vec{F}(x, y, z) = (xy)\vec{i} + (y^2)\vec{j} + (xyz)\vec{k}$ em $\mathbb{R}^3$

   (f) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ em $\mathbb{R}^3 - \{(0,0)\}$

   (g) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right)$ em $\mathbb{R}^3 - \{(0,0)\}$

15. Sejam S_R, B_R a esfera e a bola de centro na origem e raio $R > 0$, respectivamente. Considere as integrais

$$I_k(R) \doteq \iint_{S_R} x^{2k}\, dS, \quad J_k(R) \doteq \iiint_{B_R} x^{2k}\, dS.$$

(a) Usando o teorema da divergência, encontre uma relação indutiva entre $I_k(R)$ e $J_k(R)$.

(b) Mostre que $J_k(R) = \int_0^R I_k(r)r\,dr$ e conclua que $J_k'(R) = RI_k(R)$.

(c) Determine $I_k(R)$ e $J_k(R)$.

(d) Experimente a mesma técnica para calcular indutivamente integrais do tipo $\iint_{S_R} x^{2k}y^{2l}\,dS$ e $\iint_{S_R} x^{2k}y^{2l}z^{2m}\,dS$.