

Lista 1

☆ Números complexos

1. Efetue as operações indicadas abaixo:

(a) $(1+i)(1-i)$

(f) $\frac{1}{(1-i)(2+i)(-i)}$

(k) $\frac{1+2i}{1-2i} + \frac{1-i}{1+i}$

(b) $(3+2i)(5-i)(4-6i)$

(g) $(1-i)^6(2+i)^3$

(l) $\frac{(1+2i)^3(2-i)^2}{(-1-i)^3(1-i)^2}$

(c) $((1+2i)-(3-i))(-2-i)$

(h) $\frac{1-i}{3-2i} + \frac{-2i}{7-i}$

(m) $(-1-i)^{2025} + (-1+i)^{2025}$

(d) $\frac{1-i}{1+i}$

(i) $\frac{(3+i)^2(1-i)^3}{(-1+i)^2(1-i)^4}$

(n) $\operatorname{Im} \left(\frac{(1+\sqrt{3}i)^{1013}}{(1+i)^{2026}} \right)$

(e) $\frac{(2-i)(2-5i)+(-1-i)}{3-2i}$

(j) $(-1+\sqrt{3}i)^{12}(1+i)^{13}$

(o) $1+i+i^2+i^3+\dots+i^{2026}$

2. Calcule as potências indicadas abaixo:

(a) $(1+i)^{75}$

(c) $(1-i)^{16}$

(e) $(\sqrt{3}+i)^{2026}$

(b) $(2-2i)^{17}$

(d) $(-1+i)^{1977}$

(f) $(-1+\sqrt{3}i)^{2008}$

3. Determine as raízes quadradas do número $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Determine todas as raízes da equação $z^4 + az^2 + b = 0$, para $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Determine todos os números $z \in \mathbb{C}$ tais que $z^n = w$ (raízes n -ésimas de w) para os valores abaixo de n e w :

① $n = 2, w = -1$

④ $n = 3, w = 2i$

② $n = 3, w = 8i$

⑤ $n = 3, w = 1+i$

③ $n = 2, w = i$

⑥ $n = 4, w = 1-i$

6. Fatore os polinômios abaixo em termos das suas raízes (reais ou complexas):

$$\textcircled{1} \quad p(x) = x^2 + 1$$

$$\textcircled{2} \quad p(x) = x^3 + x^2 + x$$

$$\textcircled{3} \quad p(x) = x^3 + x - 2$$

$$\textcircled{4} \quad p(x) = x^3 + 1$$

$$\textcircled{5} \quad p(x) = x^4 + 1$$

$$\textcircled{6} \quad p(x) = x^4 + 4$$

7. Verifique que as afirmações abaixo são verdadeiras para todos $z, w \in \mathbb{C}$:

$$(a) \quad |z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$$

$$(b) \quad |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$$

$$(c) \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

$$(d) \quad |z| = |\bar{z}|$$

$$(e) \quad ||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$$

$$(f) \quad |zw| = |z||w|$$

$$(g) \quad \operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re} z \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w$$

$$(h) \quad \operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Re} z \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} z \operatorname{Re} w$$

$$(i) \quad |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$(j) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$(k) \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$$

$$(l) \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

$$(m) \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

$$(n) \quad 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

$$(o) \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$(p) \quad \operatorname{Re}(z \pm w) = \operatorname{Re} z \pm \operatorname{Re} w$$

$$(q) \quad \operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$$

$$(r) \quad \operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$$

$$(s) \quad \operatorname{Im}(z \pm w) = \operatorname{Im} z \pm \operatorname{Im} w$$

$$(t) \quad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$(u) \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$(v) \quad |z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\operatorname{Re} z \bar{w} + |w|^2$$

$$(w) \quad |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}|z|$$

$$(x) \quad |zw| \leq \frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2)$$

$$(y) \quad \operatorname{Re}(z^2) = (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2$$

$$(z) \quad \operatorname{Im}(z^2) = 2\operatorname{Re} z \operatorname{Im} z$$

8. Verifique que se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$, então as igualdades abaixo são verdadeiras:

$$\textcircled{1} \quad \operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re} z$$

$$\textcircled{2} \quad \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im} z$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Se } \operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(w) \text{ então pelo menos um dos números } z \text{ ou } w \text{ é real.}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Se } \operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(w) \text{ então } z \in \mathbb{R} \text{ ou } w = i\lambda, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{5} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2}, \text{ se } z \neq 0$$

$$\textcircled{7} \quad \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right), \text{ se } z \neq 0$$

$$\textcircled{6} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}, \text{ se } z \neq 0$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)} + \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)} = 0, \text{ se } z \neq 0$$

9. Uma propriedade essencial da relação de ordem $\geq$ no conjunto $\mathbb{R}$ é o fato que $x^2 \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Verifique que não é possível introduzir uma ordem $\geq$ em $\mathbb{C}$ que possua esta mesma propriedade.

10. Verifique que as afirmações abaixo são todas equivalentes a respeito de um número $z \in \mathbb{C}$:

$$\textcircled{1} \quad z \in \mathbb{R};$$

- ② $z = \operatorname{Re} z$;
- ③ $\operatorname{Im} z = 0$;
- ④ $|z| = |\operatorname{Re} z|$.

11. Verifique que, se $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 1$, é uma raiz n -ésima da unidade então

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$$

12. Dados $z, w \in \mathbb{C}$, verifique que:

- ① $\operatorname{Re}(z\overline{w}) = |z||w|$ se e só se $\arg(z) - \arg(w) = 2k\pi$ para algum inteiro k .
- ② $|z + w| = |z| + |w|$ se e só se $\arg(z) - \arg(w) = 2k\pi$ para algum inteiro k .
- ③ $|z - w| = ||z| - |w||$ se e só se $\arg(z) - \arg(w) = 2k\pi$ para algum inteiro k .

13. Aplicando a identidade

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

ao número $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \in \mathbb{C}$, com $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$, prove as identidades abaixo:

- ① $1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
- ② $\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 2\theta + \dots + \operatorname{sen} n\theta = \frac{1}{2} \cotg\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

14. Faça um esboço gráfico das regiões abaixo descritas e as classifique em aberta/fechada, limitada/ilimitada, conexa/desconexa:

- | | |
|---|--|
| (a) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$ | (g) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) \leq 1\}$ |
| (b) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 1\}$ | (h) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) = -4\}$ |
| (c) $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < z \leq 3\}$ | (i) $D = \{z \in \mathbb{C} : z - 1 > z \}$ |
| (d) $D = \{z \in \mathbb{C} : z - 3 + i < 2\}$ | (j) $D = \left\{z \in \mathbb{C} : \left \frac{z-1}{z+1}\right \leq 1\right\}$ |
| (e) $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z \leq \pi/6\}$ | (k) $D = \left\{z \in \mathbb{C} : \left \frac{z-z_1}{z-z_2}\right = \alpha\right\}, \text{ com } \alpha > 0$ |
| (f) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^2) > 0\}$ | |

☆ Funções complexas

15. Determine a parte real e a parte imaginária de cada uma das funções abaixo:

- | | |
|---------------------------------|--|
| ① $f(z) = z^2$ | ④ $f(z) = \overline{(z-i)}^3$ |
| ② $f(z) = z^2 \overline{z} - 1$ | ⑤ $f(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{1}{z}$ |
| ③ $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ | ⑥ $f(z) = (z-1)\overline{(z+2)}$ |

16. Determine os limites abaixo, se existirem:

(a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z}$

(b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}}$

(c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{\bar{z}}$

(d) $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{z - 1}$

(e) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(|z|)}{z}$

(f) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - (i+1)z + i}{z^2 + 1}$

(g) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z^2 + 1 - \cos(|z|)}{2z^2 - \ln(1 + |z|)}$

(h) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - z}{\bar{z}}$

(i) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\text{Re } z)^2}{|z|}$

(j) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{Im } z}{|z|}$

(k) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^5 - 3z^4 - 2z + 1}{z^3 + z^2 - 1}$

(l) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z^3 + 2z^4 + 5}{z^4 - z^2 - 3}$

17. Verifique que as funções abaixo não são diferenciáveis (no sentido complexo) em nenhum ponto:

① $f(z) = \bar{z}$

② $f(z) = \text{Re } z$

③ $f(z) = \text{Im } z$

18. Dentre as funções abaixo, somente uma é diferenciável (no sentido complexo) em todos os pontos de seu domínio. Qual delas? Justifique sua resposta.

① $f_1(z) = z^3 \bar{z}^2 + \text{Re } z$

② $f_2(z) = \frac{2z + 3}{z^2 - 1}$

③ $f_3(z) = \arctan(e^{y-5} + 4\text{sen } y) + i(e^{3x^2y+1} + 4x^5y^6), z = x + iy$

19. Determine as expressões para as derivadas das funções abaixo em todos os pontos de seu domínio:

① $f(z) = \frac{1}{1 - z}$

② $f(z) = 3z^2 - 2z - 1$

③ $f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{1 + z^2}$

④ $f(z) = \frac{2z^3 - 3z + 2}{z^2 + 1}$

20. Verifique que a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \sqrt{|x||y|}$, $z = x + iy$, satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em $z = 0$ mas *não* é diferenciável (no sentido complexo) neste ponto.

21. Verifique se as funções a seguir possuem derivada *no sentido complexo* nos pontos de seu domínio. Determine o valor da derivada, quando existir:

① $f(z) = \bar{z}$

② $f(z) = z - \bar{z}$

③ $f(z) = 2x + ixy^2, z = x + iy$

④ $f(z) = x + 2y + ixy^2, z = x + iy$

⑤ $f(z) = e^x \cos y + ie^x \text{sen } y, z = x + iy$

⑥ $f(z) = x^2 + iy^2, z = x + iy$

$$\textcircled{7} \quad f(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\textcircled{9} \quad f(z) = z \operatorname{Im} z$$

$$\textcircled{8} \quad f(z) = \frac{1}{z^n}$$

22. Consideremos em $\mathbb{R}^2$ o sistema usual de coordenadas polares (r, θ) dado por

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

Assim, uma função $u = u(x, y)$ pode ser pensada também como função das variáveis (r, θ) por meio da expressão $u = u(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$. Neste exercício, vamos verificar como ficam as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

① Usando a regra da cadeia, verifique que $u_r = u_x \cos \theta + u_y \operatorname{sen} \theta$ e $u_\theta = -r u_x \operatorname{sen} \theta + r u_y \cos \theta$.

② Resolvendo para u_x e u_y o sistema linear formado pelas duas equações acima, verifique que $u_x = u_r \cos \theta - \frac{1}{r} u_\theta \operatorname{sen} \theta$ e $u_y = u_r \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{r} u_\theta \cos \theta$.

③ Admitindo que uma função complexa $f = u + i v$ satisfaça as equações de Cauchy-Riemann ($u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$), verifique que

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad \text{e} \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta.$$

Estas são as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

23. Consideremos a função

$$f(z) = z^{1/2},$$

definida como $f(z) = r^{1/2}(\cos(\theta/2) + i \operatorname{sen}(\theta/2))$ para todo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, no domínio $D = \{z \in \mathbb{C} : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$. Usando o exercício anterior, verifique que f possui derivada em todos os pontos de D e

$$f'(z) = \frac{1}{2f(z)}.$$

24. Faça o mesmo procedimento do exercício anterior para a função $f(z) = z^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

25. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função diferenciável, com D conexo. Verifique que as seguintes afirmações são verdadeiras:

① Se $\operatorname{Re} f$ é constante então f é constante.

② Se $\operatorname{Im} f$ é constante então f é constante.

③ Se $|f|$ é constante então f é constante.

④ Se $\overline{f}$ é diferenciável então f é constante.

⑤ Se $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$ então f é constante.

⑥ Se $D = \mathbb{C}$, então a função g dada por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ é diferenciável.

26. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função diferenciável e $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Verifique que

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0).$$

☆ Funções harmônicas

27. Uma função $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ é de *classe* C^2 se existirem e forem contínuas em D as derivadas parciais de φ até segunda ordem, i.e., se existirem e forem contínuas em D as funções φ_x , φ_y e $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$. Uma tal função é dita *harmônica* em D se satisfizer a equação de Laplace

$$\Delta\varphi \doteq \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0.$$

Verifique que se f é uma função diferenciável em D então as partes real e imaginária de f são funções harmônicas em D .

28. Dadas duas funções harmônicas $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que estas são *conjugadas* se existir uma $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciável (complexa) tal que $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$. Verifique que as funções abaixo são harmônicas e encontre uma conjugada harmônica para cada uma:

① $u(x, y) = 2x(1 - y)$

⑤ $u(x, y) = x^2 - y^2 - x$

② $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

⑥ $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$

③ $u(x, y) = \sinh x \sin y$

⑦ $u(x, y) = x^3 + 2x - 3xy^2$

④ $u(x, y) = \sin x \cosh y$

29. Verifique que se u, v são conjugadas harmônicas, então $(-v, u)$, $(-u, v)$ e (v, u) são pares de funções conjugadas harmônicas. Verifique também que $v + c$ é conjugada harmônica de u , para qualquer constante $c \in \mathbb{C}$.

30. Determine uma conjugada harmônica v para a função $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$ no maior domínio possível D . É possível construir v em todo o domínio $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$?

31. Verifique que se $u : D \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função harmônica e D é um retângulo ou um disco, então é possível construir uma conjugada harmônica $v : D \rightarrow \mathbb{C}$ para u . Constraste este resultado com o exercício anterior. Existem outros tipos de domínio D nos quais o resultado continua verdadeiro?

32. Neste exercício, vamos determinar o operador de Laplace em coordenadas polares. Para isso, seja $u = u(x, y)$ uma função em D e consideremos em D o sistema de coordenadas polares usual (r, θ) . (Veja o exercício (22)).

① Derive novamente as expressões obtidas no primeiro item do exercício (22) e conclua que

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r + u_{rr}.$$

- ② Use o item anterior para mostrar que se u é uma função harmônica *radial*, i.e., que só depende da variável r , então existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$u(x, y) = a \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) + b.$$

33. Sejam u, v são conjugadas harmônicas. Verifique que as curvas de nível de u e v se intersectam *ortogonalmente* nos pontos onde $f = u + iv$ tem derivada não nula.

34. Verifique o fato descrito no item anterior para $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ nos seguintes casos:

① $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$

② $f(z) = z^2$

③ $f(z) = \frac{1}{z}$