**UFPR - Universidade Federal do Paraná**
**Setor de Ciências Exatas**
**Departamento de Matemática**
**CM044 - Cálculo IV - 2026/2**
**Prof. Zeca Eidam**

# Lista 2

## ✰ Funções diferenciáveis

1. Verifique que as funções abaixo não são diferenciáveis (no sentido complexo) em nenhum ponto:

   ① $f(z) = \overline{z}$

   ② $f(z) = \operatorname{Re} z$

   ③ $f(z) = \operatorname{Im} z$

2. Dentre as funções abaixo, somente uma é diferenciável (no sentido complexo) em todos os pontos de seu domínio. Qual delas? Justifique sua resposta.

   ① $f_1(z) = z^3\overline{z}^2 + \operatorname{Re} z$

   ② $f_2(z) = \dfrac{2z+3}{z^2-1}$

   ③ $f_3(z) = \arctan(e^{y-5} + 4\operatorname{sen} y) + i\left(e^{3x^2y+1} + 4x^5y^6\right)$, $z = x + iy$

3. Determine as expressões para as derivadas das funções abaixo em todos os pontos de seu domínio:

   ① $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$

   ② $f(z) = 3z^2 - 2z - 1$

   ③ $f(z) = \dfrac{z^2+z-1}{1+z^2}$

   ④ $f(z) = \dfrac{2z^3-3z+2}{z^2+1}$

4. Verifique que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \sqrt{|x||y|}$, $z = x + iy$, satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em $z = 0$ mas *não* é diferenciável (no sentido complexo) neste ponto.

5. Verifique se as funções a seguir possuem derivada *no sentido complexo* nos pontos de seu domínio. Determine o valor da derivada, quando existir:

   ① $f(z) = \overline{z}$

   ② $f(z) = z - \overline{z}$

   ③ $f(z) = 2x + ixy^2$, $z = x + iy$

   ④ $f(z) = x + 2y + ixy^2$, $z = x + iy$

   ⑤ $f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$, $z = x + iy$

   ⑥ $f(z) = x^2 + iy^2$, $z = x + iy$

   ⑦ $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$

   ⑧ $f(z) = \dfrac{1}{z^n}$

   ⑨ $f(z) = z\operatorname{Im} z$

6. Consideremos em $\mathbb{R}^2$ o sistema usual de coordenadas polares $(r,\theta)$ dado por

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Assim, uma função $u = u(x,y)$ pode ser pensada também como função das variáveis $(r,\theta)$ por meio da expressão $u = u(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Neste exercício, vamos verificar como ficam as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.

① Usando a regra da cadeia, verifique que $u_r = u_x\cos\theta + u_y\operatorname{sen}\theta$ e $u_\theta = -r\,u_x\operatorname{sen}\theta + r\,u_y\cos\theta$.

② Resolvendo para $u_x$ e $u_y$ o sistema linear formado pelas duas equações acima, verifique que $u_x = u_r\cos\theta - \dfrac{1}{r}u_\theta\operatorname{sen}\theta$ e $u_y = u_r\operatorname{sen}\theta + \dfrac{1}{r}u_\theta\cos\theta$.

③ Admitindo que uma função complexa $f = u + i\,v$ satisfaça as equações de Cauchy-Riemann ($u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$), verifique que

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta \text{ e } v_r = -\frac{1}{r}u_\theta\,.$$

Estas são as *equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares.*

7. Consideremos a função

$$f(z) = z^{1/2}\,,$$

definida como $f(z) = r^{1/2}(\cos(\theta/2) + i\operatorname{sen}(\theta/2))$ para todo $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, no domínio $D = \{z \in \mathbb{C} : r > 0\,,\, 0 < \theta < 2\pi\}$. Usando o exercício anterior, verifique que $f$ possui derivada em todos os pontos de $D$ e

$$f'(z) = \frac{1}{2f(z)}\,.$$

8. Faça o mesmo procedimento do exercício anterior para a função $f(z) = z^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

9. Seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável, com $D$ conexo. Verifique que as seguinte afirmações são verdadeiras:

① Se $\operatorname{Re} f$ é constante então $f$ é constante.

② Se $\operatorname{Im} f$ é constante então $f$ é constante.

③ Se $|f|$ é constante então $f$ é constante.

④ Se $\overline{f}$ é diferenciável então $f$ é constante.

⑤ Se $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$ então $f$ é constante.

⑥ Se $D = \mathbb{C}$, então a função $g$ dada por $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ é diferenciável.

10. Seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável e $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in D$. Verifique que

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i\,v_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) - i\,u_y(x_0,y_0)\,.$$

**☆ Funções harmônicas**

11. Uma função $\varphi : D \to \mathbb{R}$ é de *classe* $C^2$ se existirem e forem contínuas em $D$ as derivadas parciais de $\varphi$ até segunda ordem, i.e., se existirem e forem contínuas em $D$ as funções $\varphi_x$, $\varphi_y$ e $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$. Uma tal função é dita *harmônica* em $D$ se satisfizer a equação de Laplace

$$\Delta\varphi \doteq \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0\,.$$

Verifique que se $f$ é uma função diferenciável em $D$ então as partes real e imaginária de $f$ são funções harmônicas em $D$.

12. Dadas duas funções harmônicas $u, v : D \to \mathbb{R}$, dizemos que estas são *conjugadas* se existir uma $f : D \to \mathbb{C}$ diferenciável (complexa) tal que $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$. Verifique que as funções abaixo são harmônicas e encontre uma conjugada harmônica para cada uma:

① $u(x,y) = 2x(1-y)$

② $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

③ $u(x,y) = \operatorname{sinh} x \operatorname{sen} y$

④ $u(x,y) = \operatorname{sen} x \cosh y$

⑤ $u(x,y) = x^2 - y^2 - x$

⑥ $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

⑦ $u(x,y) = x^3 + 2x - 3xy^2$

13. Verifique que se $u, v$ são conjugadas harmônicas, então $(-v, u)$, $(-u, v)$ e $(v, u)$ são pares de funções conjugadas harmônicas. Verifique também que $v + c$ é conjugada harmônica de $u$, para qualquer constante $c \in \mathbb{C}$.

14. Determine uma conjugada harmônica $v$ para a função $u(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$ no *maior domínio possível* $D$. É possível construir $v$ em todo o domínio $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$?

15. Verifique que se $u : D \to \mathbb{C}$ é uma função harmônica e $D$ é um retângulo ou um disco, então é possível construir uma conjugada harmônica $v : D \to \mathbb{C}$ para $u$. Constraste este resultado com o exercício anterior. Existem outros tipos de domínio $D$ nos quais o resultado continua verdadeiro?

16. Neste exercício, vamos determinar o operador de Laplace em coordenadas polares. Para isso, seja $u = u(x,y)$ uma função em $D$ e consideremos em $D$ o sistema de coordenadas polares usual $(r,\theta)$. (Veja o exercício (6)).

① Derive novamente as expressões obtidas no primeiro item do exercício (6) e conclua que

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r + u_{rr}\,.$$

② Use o item anterior para mostrar que se $u$ é uma função harmônica *radial*, i.e., que só depende da variável $r$, então existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$u(x,y) = a\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + b\,.$$

17. Sejam $u, v$ são conjugadas harmônicas. Verifique que as curvas de nível de $u$ e $v$ se intersectam *ortogonalmente* nos pontos onde $f = u + iv$ tem derivada não nula.

18. Verifique o fato descrito no ítem anterior para $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ nos seguintes casos:

① $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$

② $f(z) = z^2$

③ $f(z) = \dfrac{1}{z}$

**☆ Funções elementares**

19. Prove as seguintes afirmações:

① $e^{\pi i} + 1 = 0$

② $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} > 0$, $z \in \mathbb{C}$

③ $e^z \in \mathbb{R}$ se e só se $\operatorname{Im} z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

④ $e^z \in i\mathbb{R}$ se e só se $\operatorname{Im} z = \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

⑤ $e^z = 1$ se e só se $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

⑥ $e^z = e^w$ se e só se $z = w + 2k\pi i$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

⑦ $\lim_{\operatorname{Re} z \to -\infty} e^z = 0$

20. Determine todos os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que:

① $e^z = -2$

② $e^z = i$

③ $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

④ $e^{2z-1} = 1$

⑤ $e^{z^2} = 1$

⑥ $e^{z^2-2z} = i$

21. Mostre que:

1. $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$
2. $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sinh}^2 y$, $z = x + iy$
3. $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sinh}^2 y$, $z = x + iy$
4. $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z$
5. $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$
6. $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$
7. $\cos(-z) = \cos z$
8. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$
9. $\operatorname{sen} z = 0$ se e só se $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$
10. $\cos z = 0$ se e só se $z = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$
11. $|\operatorname{sinh} y| \le |\operatorname{sen} z| \le \operatorname{cosh} y$, se $z = x + iy$
12. $|\operatorname{sinh} y| \le |\cos z| \le \operatorname{cosh} y$, se $z = x + iy$
13. $\operatorname{cosh}^2 z - \operatorname{sinh}^2 z = 1$
14. $|\operatorname{sen} x| \le |\operatorname{sen} z|$, se $z = x + iy$
15. $|\cos x| \le |\cos z|$, se $z = x + iy$
16. $|\operatorname{sinh} x| \le |\operatorname{cosh} z| \le \operatorname{cosh} x$, se $z = x + iy$
17. $\operatorname{sen}(z+w)\operatorname{sen}(z-w) = \dfrac{1}{2}(\cos(2w) - \cos(2z))$
18. $\cos(z+w)\cos(z-w) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(2w) - \operatorname{sen}(2z))$
19. $\cos z = \cos w$ se e só se $z \pm w = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
20. $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} w$ se e só se $z - w = 2k\pi$ ou $z + w = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
21. $|\operatorname{sinh} z|^2 = \operatorname{sinh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y$
22. $|\operatorname{cosh} z|^2 = \operatorname{sinh}^2 x + \cos^2 y$
23. $\operatorname{sinh}(iz) = i \operatorname{sen} z$
24. $\operatorname{cosh}(iz) = \cos z$
25. $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{sinh} z$
26. $\cos(iz) = \operatorname{cosh} z$
27. $\operatorname{sinh}(z + \pi i) = -\operatorname{sinh} z$
28. $\operatorname{cosh}(z + \pi i) = -\operatorname{cosh} z$
29. $\tanh(z + \pi i) = \tanh z$

22. Determine todos os valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem as equações:

① $\cos z = 1$
② $\cos z = 3$
③ $\operatorname{sen} z = 4$
④ $\cos z = i$
⑤ $\cosh z = 1/2$
⑥ $\sinh z = i$
⑦ $\cosh z = -1$
⑧ $\sinh z = 0$
⑨ $\cosh z = 0$
⑩ $\tanh z = 0$

23. Prove as identidades abaixo, para $z, w \in \mathbb{C}$ e $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $\sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \sinh w \cosh z$
2. $\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh w \sinh z$
3. $\sinh(-z) = -\sinh z$
4. $\cosh(-z) = \cosh z$
5. $\cosh(2z) = \cosh^2 z + \sinh^2 z$
6. $\sinh(2z) = 2\sinh z \cosh z$
7. $\sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \operatorname{sen} y \cosh x$
8. $\cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \operatorname{sen} y$
9. $\sinh z = 0$ se e só se $z = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
10. $\cosh z = 0$ se e só se $z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
11. $\sinh(z+w)\sinh(z-w) = \frac{1}{2}(\cosh(2z) - \cosh(2w))$
12. $\sinh(z-w)\cosh(z+w) = \frac{1}{2}(\sinh(2z) - \sinh(2w))$
13. $\cosh z = \cosh w$ se e só se $z \pm w = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
14. $\sinh z = \sinh w$ se e só se $z - w = 2k\pi i$ ou $z + w = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
15. $\cosh(2z) = \cosh^2 z + \sinh^2 z$
16. $\sinh(2z) = 2\sinh z \cosh z$

**☆ Função logaritmo**

24. Determine os valores de:

① $\log 1$
② $\log(-2)$
③ $\log i$
④ $\log(-i)$
⑤ $\log((-1)^{1/3})$
⑥ $\log(1+i)$
⑦ $\log(ei)$
⑧ $\log(\sqrt{3}+i)$
⑨ $\log(\sqrt{3}-i)$
⑩ $\log(1-i)$

25. Determine os valores de:

① $e^i$
② $2^i$
③ $(1-i)^{5i}$
④ $(1+i)^{2i+3}$
⑤ $i^{-4i}$
⑥ $2^{1+i}$
⑦ $(-1)^{\sqrt{2}}$
⑧ $(-1)^{1/\pi}$

26. Sejam $a, b, z \in \mathbb{C}$, com $z \neq 0$. Considerando os valores principais das potências envolvidas, mostre as igualdades abaixo:

① $z^{a+b} = z^a \cdot z^b$

② $\dfrac{1}{z^a} = z^{-a}$

③ $\dfrac{z^a}{z^b} = z^{a-b}$

④ $(z^a)^b = z^{ab}$

27. Calcule a derivada das funções abaixo:

① $f(z) = \dfrac{2^z - \operatorname{sen} z}{\cos(z^2) + \operatorname{sinh} z}$

② $f(z) = e^{-z^2+\cos z} \tanh z$

③ $f(z) = z^z$

④ $f(z) = \log\left(\dfrac{1+z^z}{1-z^2}\right)$

⑤ $f(z) = z^{\operatorname{sen} z} - (\operatorname{sen} z)^z$

⑥ $f(z) = \dfrac{z^2 - e^{2z}}{\operatorname{sech} z + \pi}$

**☆ Funções trigonométricas inversas**

28. Mostre que as funções multivalentes abaixo verificam as identidades indicadas:

① $\arcsin z = -i \log\left(iz + (1-z^2)^{1/2}\right)$

② $\arccos z = -i \log\left(z + (z^2-1)^{1/2}\right)$

③ $\arctan z = \dfrac{1}{2} \log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

29. Use as expressões do exercício (28) para resolver as equações abaixo:

① $\cos z = 3$

② $\operatorname{sen} z = i$

③ $\operatorname{tg} z = 2$

30. Encontre expressões explícitas (como no exercício anterior) para as funções multivalentes a seguir:

① $f(z) = \operatorname{arcsec} z$

② $f(z) = \operatorname{arccotg} z$

③ $f(z) = \operatorname{arccosec} z$

31. Determine as derivadas das funções definidas nos exercícios (28) e (30).

32. Determine os valores de:

① $\arctan(2i)$

② $\arctan(1+i)$

③ $\operatorname{arctanh}(i)$

④ $\operatorname{arccosh}(-1)$

⑤ $\operatorname{arctanh}(0)$

33. Determine expressões explícitas (como as do exercício (28)) para as funções trigonométricas hiperbólicas inversas abaixo:

① $f(z) = \operatorname{arcsinh} z$

② $f(z) = \operatorname{arccosh} z$

③ $f(z) = \operatorname{arctanh} z$

④ $f(z) = \operatorname{arcsech} z$

⑤ $f(z) = \operatorname{arccoth} z$

⑥ $f(z) = \operatorname{arccosech} z$

**☆ Integrais de linha de funções complexas**

34. Determine o valor de $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ em cada um dos casos abaixo:

1. $f(z) = z^2 + 1$ e $\gamma$ é o segmento de reta que une 0 e $1 + i$
2. $f(z) = z^2 + 1$ e $\gamma$ é a reunião dos segmentos de reta unindo 0, 1 e 1, $1 + i$
3. $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e $\gamma$ é o círculo de centro na origem e raio 3 orientado no sentido anti-horário.
4. $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$ e $\gamma$ é a porção do círculo de centro na origem e raio 1 contida no semiplano superior, orientada no sentido anti-horário.
5. $f(z) = e^z$ e $\gamma$ é o segmento de reta unindo $\pi i$ e 1.
6. $f(z) = e^z$ e $\gamma$ é a fronteira do quadrado $[-1,1] \times [-1,1]$ orientada no sentido horário.
7. $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ e $\gamma$ é qualquer curva que não passa pela origem e une os pontos $z_1$ e $z_2$ (ambos não nulos)
8. $f(z) = z\operatorname{sen}(z^2)$ e $\gamma$ é a curva $\gamma(t) = (1 + t^2) + (e^t i)$, $0 \le t \le 1$
9. $f(z) = e^{z+2}$ onde $\gamma$ é o semicírculo $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \le t \le \pi$
10. $f(z) = z^4 + 3z^3 - z + \operatorname{sen} z$ onde $\gamma$ é a curva $\gamma(t) = \cos(t^2) + i(\operatorname{sen}(t^2) + 1)$, $0 \le t \le 1$

35. Use o Teorema de Cauchy-Goursat para mostrar que as integrais abaixo são nulas (em todos os itens, $\gamma$ é a circunferência de centro na origem e raio 1 orientada no sentido anti-horário):

36. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{z-5}\,dz$

37. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z - e^{z^2}}{z^2+3}\,dz$

38. $\displaystyle\int_\gamma z\cosh(z^2+1)\,dz$

39. $\displaystyle\int_\gamma \frac{5z^3 + z + 2}{z^2-4}\,dz$

40. Se $\gamma$ é uma curva orientada no sentido anti-horário que delimita uma região que contém em seu interior a origem, mostre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

**☆ Fórmula integral de Cauchy**

41. Seja $\gamma$ uma parametrização positivamente orientada do círculo $|z| = 3$ e suponhamos que

$$f(z) = \int_\gamma \frac{2w^3 - 4w - 1}{w - z} dw$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| \neq 3$. Determine os valores de $f(2)$ e $f(z)$ para $z \in \mathbb{C}$ com $|z| > 3$.

42. Seja $D$ uma região em $\mathbb{C}$ cuja fronteira é parametrizada pela curva simples $\gamma$, orientada no sentido anti-horário e consideremos a função $g$

$$g(z) = \int_\gamma \frac{w^3 + 3w - 1}{w - z} dw$$

definida em todo $\mathbb{C}$, exceto sobre os pontos da fronteira de $D$.

① Mostre que $g(z) = 0$ se $w \notin D$.

② Mostre que $g(z) = 6\pi i z$ se $z$ pertence ao interior da região $D$.

43. Determine $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 4z + 3}$ para as seguintes curvas $\gamma$:

① $\gamma$ é a circunferência $|z| = 4$ orientada no sentido horário.

② $\gamma$ é a circunferência $|z| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

③ $\gamma$ é a circunferência $|z - 4| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

44. Determine $\displaystyle\int_\gamma \frac{(4z + 1)dz}{(z^2 + 25)(z^2 - 4z + 3)}$ para as seguintes curvas $\gamma$:

① $\gamma$ é a circunferência $|z| = 4$ orientada no sentido horário.

② $\gamma$ é a circunferência $|z| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

③ $\gamma$ é a circunferência $|z - 4| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

45. Seja $\gamma$ a parametrização da fronteira do quadrado $Q$ cujos lados estão sobre as retas $\operatorname{Re} z = \pm 2$ e $\operatorname{Im} z = \pm 2$ orientado no sentido anti-horário. Calcule as integrais a seguir:

① $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z - \pi i/2} dz$

② $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)} dz$

③ $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{2z + 1} dz$

④ $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{tg}(z/2)}{(z - i)^2} dz$

⑤ $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sinh z}{z^4} dz$

⑥ $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z^n} dz$, $n \in \mathbb{N}$

46. Calcule as seguintes integrais de linha:

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{(z - \pi/2)^2} dz$ onde $\gamma$ é a circunferência $|z| = 2$ orientado no sentido anti-horário
2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z - 1)(z - 2)} dz$ onde $\gamma$ é a circunferência $|z| = 3$ orientado no sentido anti-horário

3. $\int_\gamma \frac{z^n}{(z-a)^{n+1}}dz$ onde $\gamma$ é a circunferência $|z|=2$ orientado no sentido anti-horário
4. $\int_\gamma \frac{z^2+1}{(z-2)^3}dz$ onde $\gamma$ é a circunferência $|z-2|=1$ orientado no sentido anti-horário
5. $\int_\gamma \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z}dz$ onde $\gamma$ é a circunferência $|z-2|=4$ orientado no sentido anti-horário
6. $\int_\gamma \mathrm{Re}\,(z^2)dz$ onde $\gamma$ é a fronteira do triângulo de vértices 0, 2 e $2+i$ orientada no sentido anti-horário
7. $\int_\gamma \frac{e^z}{z^2-1}dz$ onde $\gamma$ é a curva obtida a partir da reunião das circunferências de raio 1 e centro nos pontos $z=1$ e $z=-1$, sendo a primeira delas percorrida no sentido anti-horário e a segunda percorrida no sentido horário.
8. $\int_\gamma \mathrm{Re}\,(z)dz$ onde $\gamma$ é a semi-circunferência superior de raio 1 e centro na origem, orientada no sentido de 1 para $-1$
9. $\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4}$ onde $\gamma$ é a elipse de equação $x^2+4(y-2)^2=4$ orientada no sentido anti-horário.
10. $\int_\gamma \frac{2-\operatorname{sen} z}{z^2-z}$ onde $\gamma$ é a fronteira do retângulo de vértices nos pontos $2+2i$, $-2+2i$, $-2-2i$ e $2-2i$ orientada no sentido anti-horário.
11. $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3}$ onde $\gamma$ é a fronteira do quadrado delimitado pelas retas $\mathrm{Re}\,z=\pm 1$ e $\mathrm{Im}\,z=\pm 1$ orientada no sentido anti-horário.
12. $\int_\gamma \frac{z^3+\operatorname{sen} z}{(z-i)^3}$ onde $\gamma$ é a fronteira do triângulo de vértices nos pontos $\pm 2$ e $2i$, orientada no sentido anti-horário.
13. $\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z(z-2i)^2}$ onde $\gamma$ é a fronteira do quadrado de vértices nos pontos $\pm 3$, $\pm 3i$, orientada no sentido anti-horário.

47. Dado $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq -1$, mostre que $\int_\gamma z^n dz=0$, onde $\gamma$ é uma curva fechada qualquer que não passa pela origem.

48. Seja $\gamma$ a circunferência $|z-i|=2$ orientada no sentido anti-horário. Determine:

① $\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4}dz$ ② $\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+4)^2}dz$

49. Seja $\gamma$ a circunferência $|z|=2$ orientada no sentido anti-horário. Determine $\int_\gamma f(z)dz$ nos seguintes casos:

① $f(z)=\frac{5}{z^{1975}}+\frac{2008}{z^{1977}}-\frac{16}{z-1/2}+z^{2013}$ ③ $f(z)=\frac{3z+5}{z^2+z}$

② $f(z)=\frac{\overline{z}}{|z|}$ ④ $f(z)=\frac{e^z}{z^2+z}$

50. Calcule:

① $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{\overline{z}}{|z|}\,dz$ onde $\gamma_R$ é a circunferência de centro na origem e raio $R>0$ orientada positivamente.

② $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{\overline{z}}{z}\,dz$ onde $\gamma$ é a reunião das semi-circunferências superiores de centro na origem e raios $R_2>0$ e $R_1>R_2$ com os segmentos de reta unindo os pontos $-R_1,-R_2$ e $R_2,R_1$, orientada no sentido anti-horário.

51. Dados números reais $a,b>0$, considere a *elipse* de equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

① Encontre uma parametrização $\gamma$ desta curva no sentido anti-horário.

② Calculando a integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$, mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\mathrm{sen}^2\theta}=\frac{2\pi}{ab}\,.$$

52. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{Im}\,(z^2)\,dz$ nos seguintes casos:

① $\gamma$ é o segmento de reta unindo 0 a $2+4i$;

② $\gamma$ é a parábola $y=x^2$ entre os pontos 0 e $2+4i$.

O que podemos concluir sobre a função $f(z)=\mathrm{Im}\,(z^2)$?

53. Sejam $D$ uma região fechada em $\mathbb{C}$ cuja fronteira é parametrizada pela curva simples $\gamma$, orientada no sentido anti-horário e $f$ uma função analítica definida em um aberto contendo $D$

① Se $w\notin D$, mostre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz=0$.

② Se $w$ não pertence à fronteira de $D$ então $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{z-w}\,dz=\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^2}\,dz$.

③ Generalize a fórmula acima, obtendo $\displaystyle\int_\gamma \frac{f^{(n)}(z)}{z-w}\,dz=n!\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^n}\,dz$.

54. Seja $\gamma$ uma curva fechada simples, $D$ a região fechada delimitada por $\gamma$ e $z_1,z_2$ pontos distintos no interior de $D$.

① Dada qualquer $f$ analítica num aberto contendo $D$, mostre que

$$f(z_1)=f(z_2)+\frac{z_1-z_2}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz\,.$$

② Usando a identidade do item anterior, é possível construir uma prova do teorema de Liouville, nas seguintes linhas.

Dada $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analítica tal que $|f(z)|\le M$, para todo $z\in\mathbb{C}$ com $|z|\le R$, tomando $z_1=z$, $z_0=0$ e $\gamma=\gamma_{R'}$ a circunferência de centro na origem e raio $R'>R$ orientada no sentido anti-horário, tem-se

$$f(z)=f(0)+\frac{z}{2\pi i}\int_{\gamma_{R'}}\frac{f(w)}{(w-z)w}dw,$$

portanto,

$$\begin{aligned}
|f(z)-f(0)| &= \left|\frac{z}{2\pi i}\int_{\gamma_{R'}}\frac{f(w)}{(w-z)w}dw\right| \\
&\le \frac{|z|}{2\pi}\int_{\gamma_{R'}}\frac{|f(w)|}{|w-z||w|}|dw| \\
&\le \frac{R}{2\pi}\int_{\gamma_{R'}}\frac{M}{(R'-R)\cdot R'}|dw| \\
&= \frac{R}{2\pi}\cdot\frac{M}{(R'-R)\cdot R'}\cdot(2\pi R')=M\frac{R}{R'-R}\to\infty,\ \text{se } R'\to 0.
\end{aligned}$$

55. Sejam $D=\{z\in\mathbb{C}:0\le\operatorname{Re}z\le 2\pi,\ 0\le\operatorname{Im}z\le 1\}$ e $f(z)=\operatorname{sen}z$. Determine o valor máximo de $|f|$ em $D$ e o(s) ponto(s) onde este valor é assumido.

56. Se $D$ é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{C}$, determine em que pontos de $D$ a função $|f|$ assume seu valor máximo, onde $f(z)=e^z$.

57. Determine os pontos de máximo e mínimo para $|f|$ em $D$, onde $f(z)=(z+1)^2$ e $D$ é o triângulo com vértices nos pontos $z=0$, $z=2$ e $z=i$.

58. (Teorema do módulo máximo para funções harmônicas) Seja $u:U\to\mathbb{R}$ uma função harmônica em um aberto $U\subset\mathbb{R}^2$. Mostre que se $(x_0,y_0)\in U$ é tal que $u(x_0,y_0)\ge u(x,y)$ para todo $(x,y)\in U$ então $u$ é constante. (Dica: se $v$ é uma conjugada harmônica para $u$, aplique o teorema do módulo máximo à função analítica $e^f$, onde $f=u+iv$.)

59. Neste exercício, vamos enunciar um resultado análogo o teorema do módulo máximo para pontos de mínimo de uma função analítica.

① Mostre que se $f(z)=z$, $z\in D$, com $D$ o disco unitário, então $|f(0)|=0\le|f(z)|$ para todo $z\in D$. Isso mostra que os pontos de mínimo de $|f|$ em $D$ podem ser interiores a $D$ sem que necessariamente $f$ seja constante.

② Seja $f$ uma função analítica em um aberto contendo o conjunto fechado e limitado $D$ e suponhamos que $f(z)\neq 0$ para todo $z\in D$. Mostre que os pontos de mínimo de $|f|$ pertencem à fronteira de $D$.