UFPR - Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
CM044 - Cálculo IV - 2026/2
Prof. Zeca Eidam

Lista 3

✰ Fórmula integral de Cauchy

1. Seja γ uma parametrização positivamente orientada do círculo $|z| = 3$ e suponhamos que

$$f(z) = \int_\gamma \frac{2w^3 - 4w - 1}{w - z} dw$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| \neq 3$. Determine os valores de $f(2)$ e $f(z)$ para $z \in \mathbb{C}$ com $|z| > 3$.

2. Seja D uma região em $\mathbb{C}$ cuja fronteira é parametrizada pela curva simples γ, orientada no sentido anti-horário e consideremos a função g

$$g(z) = \int_\gamma \frac{w^3 + 3w - 1}{(w - z)^3} dw$$

definida em todo $\mathbb{C}$, exceto sobre os pontos da fronteira de D.

   ① Mostre que $g(z) = 0$ se $w \notin D$.

   ② Mostre que $g(z) = 6\pi i z$ se z pertence ao interior da região D.

3. Determine $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 4z + 3}$ para as seguintes curvas γ:

   ① γ é a circunferência $|z| = 4$ orientada no sentido horário.

   ② γ é a circunferência $|z| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

   ③ γ é a circunferência $|z - 4| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

4. Determine $\displaystyle\int_\gamma \frac{(4z + 1)dz}{(z^2 + 25)(z^2 - 4z + 3)}$ para as seguintes curvas γ:

   ① γ é a circunferência $|z| = 4$ orientada no sentido horário.

   ② γ é a circunferência $|z| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

   ③ γ é a circunferência $|z - 4| = 2$ orientada no sentido anti-horário.

5. Sejam D uma região fechada em $\mathbb{C}$ cuja fronteira é parametrizada pela curva simples γ, orientada no sentido anti-horário e f uma função analítica definida em um aberto contendo D.

   ① Se $z \notin D$, mostre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = 0$.

② Se z não pertence à fronteira de D então $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(w)}{w-z}\,dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$.

③ Generalize a fórmula acima, obtendo $\displaystyle\int_\gamma \frac{f^{(n)}(w)}{w-z}\,dw = n!\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^n}\,dw$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Seja γ a parametrização da fronteira do quadrado Q cujos lados estão sobre as retas $\operatorname{Re} z = \pm 2$ e $\operatorname{Im} z = \pm 2$ orientado no sentido anti-horário. Calcule as integrais a seguir:

① $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z - \pi i/2}\,dz$

② $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,dz$

③ $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{2z+1}\,dz$

④ $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{tg}(z/2)}{(z-i)^2}\,dz$

⑤ $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{sinh} z}{z^4}\,dz$

⑥ $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z^n}\,dz$, $n \in \mathbb{N}$

7. Calcule as seguintes integrais de linha:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-\pi/2)^2}\,dz$ onde γ é a circunferência $|z| = 2$ orientada no sentido anti-horário

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z-2)}\,dz$ onde γ é a circunferência $|z| = 3$ orientada no sentido anti-horário

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^n}{(z-a)^{n+1}}\,dz$ onde γ é a circunferência $|z| = 2$ orientada no sentido anti-horário

(d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+1}{(z-2)^3}\,dz$ onde γ é a circunferência $|z-2| = 1$ orientada no sentido anti-horário

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z}\,dz$ onde γ é a circunferência $|z-2| = 4$ orientada no sentido anti-horário

(f) $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Re}(z^2)\,dz$ onde γ é a fronteira do triângulo de vértices 0, 2 e $2+i$ orientada no sentido anti-horário

(g) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2-1}\,dz$ onde γ é a curva obtida a partir da reunião das circunferências de raio 1 e centro nos pontos $z = 1$ e $z = -1$, sendo a primeira delas percorrida no sentido anti-horário e a segunda percorrida no sentido horário.

(h) $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Re}(z)\,dz$ onde γ é a semi-circunferência superior de raio 1 e centro na origem, orientada no sentido de 1 para -1

(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4}$ onde γ é a elipse de equação $x^2 + 4(y-2)^2 = 4$ orientada no sentido anti-horário.

(j) $\displaystyle\int_\gamma \frac{2-\operatorname{sen} z}{z^2-z}\,dz$ onde γ é a fronteira do retângulo de vértices nos pontos $2+2i$, $-2+2i$, $-2-2i$ e $2-2i$ orientada no sentido anti-horário.

(k) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3}\,dz$ onde γ é a fronteira do quadrado delimitado pelas retas $\operatorname{Re} z = \pm 1$ e $\operatorname{Im} z = \pm 1$ orientada no sentido anti-horário.

(l) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^3+\operatorname{sen} z}{(z-i)^3}\,dz$ onde γ é a fronteira do triângulo de vértices nos pontos ± 2 e $2i$, orientada no sentido anti-horário.

(m) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z(z-2i)^2}\,dz$ onde γ é a fronteira do quadrado de vértices nos pontos ± 3, $\pm 3i$, orientada no sentido anti-horário.

8. Dado $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, mostre que $\displaystyle\int_\gamma z^n\,dz = 0$, onde γ é uma curva fechada qualquer que não passa pela origem.

9. Seja γ a circunferência $|z-i| = 2$ orientada no sentido anti-horário. Determine:

① $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+4}\,dz$ ② $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+4)^2}\,dz$

10. Seja γ a circunferência $|z| = 2$ orientada no sentido anti-horário. Determine $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ nos seguintes casos:

① $\displaystyle f(z) = \frac{5}{z^{1975}} + \frac{2008}{z^{1977}} - \frac{16}{z-1/2} + z^{2013}$ ③ $\displaystyle f(z) = \frac{3z+5}{z^2+z}$

② $\displaystyle f(z) = \frac{\overline{z}}{|z|}$ ④ $\displaystyle f(z) = \frac{e^z}{z^2+z}$

11. Calcule:

① $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{\overline{z}}{|z|}\,dz$ onde γ_R é a circunferência de centro na origem e raio $R > 0$ orientada positivamente.

② $\displaystyle\int_\gamma \frac{\overline{z}}{z}\,dz$ onde γ é a reunião das semi-circunferências superiores de centro na origem e raios $R_2 > 0$ e $R_1 > R_2$ com os segmentos de reta unindo os pontos $-R_1, -R_2$ e R_2, R_1, orientada no sentido anti-horário.

12. Dados números reais $a, b > 0$, considere a *elipse* de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

① Encontre uma parametrização γ desta curva no sentido anti-horário.

② Calculando a integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$, mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}\,.$$

13. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Im}(z^2)\,dz$ nos seguintes casos:

① γ é o segmento de reta unindo 0 a $2+4i$;

② γ é a parábola $y = x^2$ entre os pontos 0 e $2+4i$.

O que podemos concluir sobre a função $f(z) = \text{Im}(z^2)$?

☆ Séries de potências

14. Determine as séries de Maclaurin das funções abaixo:

(a) $f(z) = e^z$

(b) $f(z) = e^{z^2}$

(c) $f(z) = \text{sen}\, z$

(d) $f(z) = \dfrac{\text{sen}\, z}{z}$

(e) $f(z) = \cos z$

(f) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$

(g) $f(z) = \sinh z$

(h) $f(z) = \cosh z$

(i) $f(z) = z\cosh(z^2)$

(j) $f(z) = \text{sen}^2 z$

(k) $f(z) = \text{sech} z = \dfrac{1}{\cosh z}$

(l) $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2}$

(m) $f(z) = \dfrac{\sinh z}{z}$

(n) $f(z) = \sec z = \dfrac{1}{\cos z}$

15. Obtenha a série de Laurent de cada f a seguir no domínio D indicado:

(a) $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$, $D : |z| > 1$

(b) $f(z) = \dfrac{\sinh z}{z^2}$, $D : |z| > 0$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$, $D : |z| > 1$

(d) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^3}$, $D : |z| > 0$

(e) $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{z^2}$, $D : |z| > 0$

(f) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$, $D : 0 < |z| < 1$

(g) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$, $D : |z| > 1$

(h) $f(z) = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z-2}$, $D : 1 < |z| < 2$

(i) $f(z) = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z-2}$, $D : |z| > 2$

(j) $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)}$, $D : 0 < |z| < 1$

(k) $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)}$, $D : |z| > 1$

(l) $f(z) = \text{cosech} z = \dfrac{1}{\sinh z}$, $D : 0 < |z| < \pi$

16. Considere $f(z) = \sinh(z^2)$, $z \in \mathbb{C}$.

① Obtenha a série de Maclaurin de f.

② Mostre que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n *ímpar* e $f^{(m)}(0) = 0$ para todo m múltiplo de 4.

17. Obtenha os primeiros termos das séries de Taylor/Laurent das funções abaixo (em torno da origem):

(a) $\text{cosec}\, z = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{6}z + \dfrac{7}{360}z^3 + \dfrac{31}{15120}z^5 + \ldots,\ 0 < |z| < \pi$

(b) $\dfrac{1}{e^z - 1} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{12}z - \dfrac{1}{720}z^3 + \ldots,\ 0 < |z| < 2\pi$

(c) $\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3}z^3 - \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \ldots$, $|z| < \pi/2$

(d) $\sec z = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{5}{24}z^4 + \frac{61}{720}z^6 + \ldots$, $|z| < \pi/2$

(e) $\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 + \ldots$, $0 < |z| < \pi$

☆ Singularidades e Resíduos

18. Para cada função a seguir, determine o tipo de singularidade que a mesma apresenta em z_0 (polo de ordem m ou singularidade essencial) e calcule o resíduo de f em $z = z_0$:

(a) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2(z-1)}$, $z_0 = 0$

(b) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2(z-1)}$, $z_0 = 1$

(c) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2}$, $z_0 = 0$

(d) $f(z) = \dfrac{z^2+(1-i)z-i}{z^2+1}$, $z_0 = i$

(e) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sinh} z}{z^4}$, $z_0 = 0$

(f) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z+1)}$, $z_0 = 0$

(g) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z+1)}$, $z_0 = -1$

(h) $f(z) = z\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $z_0 = 0$

(i) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$, $z_0 = 0$

(j) $f(z) = e^{1/z}$, $z_0 = 0$

(k) $f(z) = \dfrac{\operatorname{Log}(1+z)}{z^2}$, $z_0 = 0$

(l) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$, $z_0 = 0$

(m) $f(z) = \cosh\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $z_0 = 0$

(n) $f(z) = \dfrac{\operatorname{cosec}(z^2)}{z^3}$, $z_0 = 0$

(o) $f(z) = z\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $z_0 = 0$

19. Determine o valor das integrais a seguir (com todas as curvas envolvidas orientadas no sentido anti-horário):

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz$, onde γ é a circunferência $|z-2| = 2$;

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz$, onde γ é a circunferência $|z-1| = 1$;

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}\,dz$, onde γ é a circunferência $|z| = 4$;

(d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+1}{z^2-2z}\,dz$, onde γ é a circunferência $|z-4| = 3$;

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+\pi^2}\,dz$, onde γ é a circunferência $|z-3| = 1$;

(f) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2(z^2+4)}\,dz$, onde γ é a circunferência $|z| = 2$;

(g) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2(z^2+4)}\,dz$, onde γ é a circunferência $|z+2| = 3$;

(h) $\int_\gamma \operatorname{tg} z\,dz$, onde γ é a circunferência $|z| = 2$;

(i) $\int_\gamma \dfrac{dz}{\operatorname{sinh}(2z)}\,dz$, onde γ é a circunferência $|z| = 2$;

(j) $\int_\gamma \dfrac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)}\,dz$, onde γ é a circunferência $|z| = 2$;

(k) $\int_\gamma \dfrac{dz}{z^2 e^z}\,dz$, onde γ é a circunferência $|z| = 1$;

(l) $\int_\gamma \dfrac{\operatorname{cossec} z}{z}\,dz$, onde γ é a circunferência $|z| = 1$;

(m) $\int_\gamma \dfrac{\operatorname{cossec} z}{z^2}\,dz$, onde γ é a circunferência $|z| = 1$;

(n) $\int_\gamma z e^{1/z}\,dz$, onde γ é a circunferência $|z| = 2$;

(o) $\int_\gamma \tanh z\,dz$, onde γ é a circunferência $|z - i| = 1$;

(p) $\int_\gamma \dfrac{1-e^z}{z^3}\,dz$, onde γ é a circunferência $|z| = 1/2$;

20. Use o teorema dos resíduos para calcular as seguintes integrais impróprias (quocientes de polinômios):

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \pi$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{6}$

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

(f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \frac{\pi}{6}$

(g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\,dx = -\frac{\pi}{5}$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\,dx = \frac{2\pi}{5}$

(j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

(k) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

(l) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{(2n-2)!}{((n-1)!2^{n-1})^2}\pi,\ n \in \mathbb{N}$

21. Use o teorema dos resíduos para calcular as seguintes integrais impróprias (quocientes de funções trigonométricas por polinômios):

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+4x+5}\,dx = -\frac{\pi \operatorname{sen} 2}{e}$

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi e^{-a}}{2},\ a \geq 0$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2e}$

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{6}(e-1)$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{e^{-b}\cos a}{b},\ a, b > 0$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \frac{\pi}{2}$

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},\ a \neq 0$

22. Use o teorema dos resíduos para calcular as seguintes integrais definidas (quocientes de funções trigonométricas):

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta = -\frac{\pi}{3}$

(b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}, a>1$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta} = \pi\sqrt{2}$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\operatorname{sen}\theta}\,d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}},\ |a|<1$

(e) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{a+\cos\theta}{a-\cos\theta}\,d\theta = \pi\left(\frac{2a}{\sqrt{a^2-1}}-1\right),\ a>1$

(f) $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}^{2n}\theta\,d\theta = \pi\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2},\ n\in\mathbb{N}$

(g) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^{2n}\theta\,d\theta = \pi\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2},\ n\in\mathbb{N}$

(h) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{d\theta}{a^2+\cos^2\theta} = \frac{\pi}{a\sqrt{a^2+1}},\ a>0$

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\,d\theta = \frac{2\pi}{1-a^2},\ |a|<1$

23. Use o teorema dos resíduos para calcular as seguintes integrais definidas (integração em torno de um ponto de ramificação):

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)},\ 0<\alpha<1$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx = 0$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi^3}{8}$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\ln x)^3}{x^2+1}\,dx = 0$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\frac{1-\alpha}{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)},\ -1<\alpha<3$

(h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^3}\,dx = -\frac{2\pi^2}{27}$

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right),\ |\alpha|<1$

24. Dados $R>0$ e $0<\alpha<1$, considere γ_R a fronteira (orientada no sentido anti-horário) do retângulo A_R formado pelos $z\in\mathbb{C}$ tais que $|\operatorname{Re} z|\le R$ e $0\le \operatorname{Im} z\le 2\pi$. Integrando $f(z)=\dfrac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$ sobre γ_R e fazendo $R\to\infty$, mostre que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}.$$

25. Neste exercício, vamos utilizar o teorema dos resíduos para calcular a *integral gaussiana*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{1}$$

① Seja $\tau=\sqrt{\pi}(1+i)$. Então $\tau^2=2\pi i$ e, portanto, $e^{\tau^2}=1$. Definindo

$$f(z)=\frac{e^{-z^2/2}}{1+e^{-\tau z}},$$

mostre que $f(z)-f(z+\tau)=e^{-z^2/2}$, $z\in\mathbb{C}$.

② Verifique que os polos de f são da forma $z = \pm\tau/2, \pm 3\tau/2, \pm 5\tau/2, \ldots$.

③ Verifique que o retângulo A_R formado pelos $z \in \mathbb{C}$ tais que $|\operatorname{Re} z| \leq R$ e $0 \leq \operatorname{Im} z \leq \sqrt{\pi}$ contém apenas um dos polos de f, a saber $z_0 = \tau/2$ e $\operatorname{Res}(f, z_0) = \dfrac{-i}{\sqrt{2\pi}}$.

④ Integrando f sobre a fronteira de A_R, usando o fato que $\sqrt{\pi}i = \tau - \pi$ e fazendo $R \to \infty$, conclua que

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x) - f(x+\sqrt{\pi}i)\big)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x) - f((x-\pi)+\tau)\big)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx.$$

Fazendo a mudança de variável $u = x/\sqrt{2}$, obtemos a fórmula (1).

26. Dado $R > 0$, seja γ_R a fronteira do setor circular $S_{R,2\pi/3} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R,\ 0 \leq \arg z \leq 2\pi/3\}$ e consideremos a função $f(z) = \dfrac{1}{1+z^3}$, $z^3 \neq -1$.

① Usando o teorema dos resíduos, verifique que

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; e^{\pi i/3}).$$

Fazendo $R \to \infty$, conclua que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

② Usando uma técnica semelhante, conclua que para qualquer $\alpha > 1$ tem-se

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha} = \frac{\pi/\alpha}{\operatorname{sen}(\pi/\alpha)}.$$

Há também outras formas de calcular esta integral.[1]

27. Neste exercício, vamos mostrar que

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \tag{2}$$

As integrais acima são chamadas de *integrais de Fresnel*.

① Integre a função $f(z) = e^{-z^2}$ sobre a fronteira do setor circular $S_{R,\pi/4} : 0 \leq \theta \leq \pi/4,\ 0 \leq r \leq R$.

② Faça $R \to \infty$ e conclua que as identidades (2) são verificadas.

28. Neste exercício, vamos mostrar que

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^\alpha)\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)}{\alpha} \text{ e } \int_0^{\infty} \cos(x^\alpha)\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)}{\alpha}, \tag{3}$$

para qualquer $\alpha > 1$. As integrais acima são chamadas de *integrais de Fresnel generalizadas*.

[1] Usando a função B: fazendo a mudança de variável $u = x^\alpha$, obtemos

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+u}\,du = \frac{1}{\alpha}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}, 1-\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi/\alpha}{\operatorname{sen}(\pi/\alpha)}.$$

① Fazendo a mudança de variáveis $u = x^\alpha$, mostre que $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}(x^\alpha)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} u}{u^{1-1/\alpha}}\,du$ e $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x^\alpha)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \frac{\cos u}{u^{1-1/\alpha}}\,du$. Isso mostra que ambas as integrais convergem (não absolutamente).

② Fazendo $\beta = 1 - 1/\alpha > 0$, considere a função $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^\beta}$, $z \neq 0$. Integre a função f sobre a fronteira da região $D_{r,R}$ formada pelos $z \in \mathbb{C}$ no primeiro quadrante tais que $r \leq |z| \leq R$, para $0 < r < R$.

③ Tomando $r \to 0^+$ e $R \to \infty$, conclua que

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x^\beta}\,dx = e^{\frac{\pi i(1-\beta)}{2}}\,\Gamma(1-\beta)\,,$$

e, portanto, as fórmulas (2) e (3) são verificadas.[2]

29. Usando uma técnica semelhante àquela utilizada no exercício (27), calcule as seguintes integrais definidas:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi}{4}$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^6+x^3+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^8+x^4+1}\,dx$

30. Neste exercício, estudaremos a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2-4x+5)}$.

① Verifique que, no sentido estrito da definição de integral imprópria, a integral acima diverge.

② Mostre que

$$\lim_{a\to 0^+}\int_{-\infty}^{-a} \frac{dx}{x(x^2-4x+5)} + \int_a^\infty \frac{dx}{x(x^2-4x+5)} = \frac{2\pi}{5}\,.$$

O valor acima é chamado de *Valor Principal de Cauchy* da integral em questão e é denotado por $\operatorname{VP}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2-4x+5)}$.

[2] Também é possível obter as referidas fórmulas trabalhando como no exercício (27): integre a função $f(z) = e^{-z^\alpha}$ sobre a fronteira do setor circular $S_{r,\pi/2\alpha}$ e faça $R \to \infty$.