UFPR - Universidade Federal do Paraná
Departamento de Matemática
CM314 - Cálculo IV - 2026/2
Prof. José Carlos Eidam

Lista 3

✰ Equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes variáveis

1. Verifique que y_1 é solução da equação dada e determine, a partir de y_1, outra solução y_2 da equação, de forma que o conjunto $\{y_1, y_2\}$ seja linearmente independente.

   (1) $x^2y'' + xy' - 4y = 0$, $y_1 = x^2$
   (2) $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$, $y_1 = x$
   (3) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$, $y_1 = x$
   (4) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, $y_1 = x$
   (5) $xy'' + 3y' = 0$, $y_1 = 1$
   (6) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$, $y_1 = x^{-1/2}$
   (7) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$, $y_1 = e^x$
   (8) $y'' - 4y' + 12y = 0$, $y_1 = e^{6x}$
   (9) $x^2y'' + 2xy' = 0$, $y_1 = 1$
   (10) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $y_1 = x^{-1}$
   (11) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$; $y_1 = x$
   (12) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$; $y_1 = 3x^2 - 1$

2. Considere a equação diferencial

$$xy'' - (x+n)y' + ny = 0,$$

   onde n é um inteiro não-negativo.

   (a) Mostre que $y_1 = e^x$ é solução da equação.
   (b) Mostre que $y_2 = Ce^x \int x^n e^{-x} dx$, $C \in \mathbb{R}$, é uma solução da equação dada e $\{y_1, y_2\}$ é linearmente independente.
   (c) Estude os casos $n = 1$ e $n = 2$.

3. Resolva as seguintes equações de Euler em $(0, +\infty)$:

   (1) $x^2y'' + xy' + y = 0$
   (2) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
   (3) $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$
   (4) $2x^2y'' + 10xy' + 3y = 0$
   (5) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$
   (6) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$
   (7) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$
   (8) $x^2y'' + xy' + y = 0$
   (9) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
   (10) $x^2y'' - xy' + y = 0$
   (11) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$
   (12) $2x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
   (13) $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$
   (14) $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
   (15) $x^2y'' - 2y = 0$

4. Determine a solução geral das equações a seguir via método dos coeficientes a determinar:

(1) $y'' + y' - 2y = 2x$
(2) $y'' - 2y' - 2y = 2x^2 - 1$
(3) $y'' + 2y' + y = xe^x$
(4) $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$
(5) $y'' + y = 3\operatorname{sen} 2x$
(6) $y'' + y = x\cos 2x$
(7) $y'' + 2y' + y = e^x \cos x$
(8) $y'' - 2y' + y = xe^x + 4$
(9) $y'' + y' + 4y = 2\operatorname{senh} x$
(10) $y'' + 3y' + 2y = e^x + e^{2x}$
(11) $y'' + y = \cos x + 8x^2$

5. Determine a solução geral das seguintes equações lineares de segunda ordem não-homogêneas:

(1) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$
(2) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$
(3) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sec 2x$
(4) $y'' - 2y' = 12x - 10$
(5) $y'' + y = 2\cos x$
(6) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$
(7) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\operatorname{sen} x$
(8) $y'' + 4y = 3\operatorname{sen} x$
(9) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$
(10) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$
(11) $y'' + y' - 2y = 8\operatorname{sen} x$
(12) $y'' - 3y' = x + \cos x$
(13) $y'''' - 2y''' + y'' = x^3$
(14) $y''' - y = x^3 - 1$
(15) $y'' - 2y = 2e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$
(16) $y'' - 3y' - 4y = 2\operatorname{sen} x$
(17) $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$
(18) $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$
(19) $y'' + 9y = 9\sec^2(3x)$
(20) $y'' + y = \operatorname{tg} x$
(21) $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$
(22) $y'' + 4y = \operatorname{cosec} 2x$
(23) $y'' + y = \sec x$
(24) $y'' + y = \operatorname{tg} x$
(25) $y'' - 3y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$
(26) $xy'' - y' = 3x^2$
(27) $x^2y'' + xy' - y = x^2$

6. Para cada equação linear de 2a ordem abaixo, verifique que $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto linearmente independente de soluções da equação homogênea correspondente e determine a solução geral da equação dada:

(a) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3$, $x > 0$, $y_1 = x$ e $y_2 = xe^x$
(b) $xy'' - (1+x)y' + y = x^2e^{2x}$, $x > 0$, $y_1 = 1 + x$ e $y_2 = e^x$
(c) $(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2e^{-x}$, $y_1 = e^x$ e $y_2 = x$

7. Determine a solução geral das seguintes equações lineares de segunda ordem não-homogêneas (com coeficientes variáveis):

(1) $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2-1)^2$
(2) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x^2$
(3) $x^2y'' + 7xy' + 5y = x$
(4) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$
(5) $xy'' - (1+x)y' + y = x^2e^{2x}$
(6) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 3x^{3/2}\operatorname{sen} x$ (Use o exercício 1.6)
(7) $x^2y'' + xy - 4y = x^3 \ln x$

8. Ache a solução geral da equação diferencial dada em série de potências centradas em $x_0 = 0$:

(1) $y'' - xy' - y = 0$
(2) $y'' - x^2 y = 0$
(3) $y'' + 2xy' + 4y = 0$
(4) $y'' - xy = 0$ (Equação de Airy)
(5) $y'' - xy' - y = 0$
(6) $y'' - y = 0$
(7) $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ (Equação de Hermite)
(8) $(1-x)y'' + y = 0$
(9) $y'' + \alpha^2 x^2 y = 0$, $\alpha \neq 0$
(10) $y'' + x^2 y' + xy = 0$
(11) $y'' = x^2 y$
(12) $y'' = x^3 y$

9. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, a equação diferencial

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2) y = 0,$$

é chamada *Equação de Bessel de ordem* α.

(a) Se $\alpha = 0$, mostre que

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

e

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^{2n}$$

são soluções linearmente independentes da equação de Bessel.

(b) Se $\alpha = 1$ mostre que

$$y = x\left(1 - \frac{x^2}{2^2 2!} + \frac{x^4}{2^4 2!3!} - \frac{x^6}{2^6 2!3!4!} + \ldots\right)$$

é uma solução da equação.

10. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, a equação diferencial

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1) y = 0,$$

é chamada *Equação de Legendre de ordem* α. Mostre que as funções

$$y_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\ldots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\ldots(\alpha+2m-1)}{(2m)!} x^{2m}$$

e

$$y_2 = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\ldots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\ldots(\alpha+2m)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

são soluções linearmente independentes da equação de Legendre no intervalo $(-1, 1)$.

☆ Transformada de Laplace

11. Calcule a transformada de Laplace de cada uma das funções abaixo:

(1) $f(t) = e^{5t} - 2e^t$
(2) $f(t) = \cos(2t) - t$
(3) $f(t) = 2t^6 - t + \cos(7t)$
(4) $f(t) = e^{2t-3}$
(5) $f(t) = \sinh(3t) + 5t^2 + 3$
(6) $f(t) = 2t^2 - t + 4$
(7) $f(t) = \cos^2 t$
(8) $f(t) = e^{2x}(\cosh(3x) + 2\sinh(3x))$
(9) $f(t) = (\operatorname{sen} t - \cos t)^2$

(10) $f(t) = \begin{cases} 5 & , \text{se } 0 < t < 3 \\ 0 & , \text{se } t \geq 3 \end{cases}$

(11) $f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{se } 0 < t < 1 \\ t^2 - 2t + 2 & , \text{se } t \geq 1 \end{cases}$

(12) $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t & , \text{se } 0 < t < 2\pi \\ \operatorname{sen} t + \cos t & , \text{se } t \geq 2\pi \end{cases}$

(13) $f(t) = \begin{cases} 2t & , \text{se } 0 < t < 5 \\ 1 & , \text{se } t \geq 5 \end{cases}$

12. Vamos estudar a transformada de Laplace da função $f(t) = t^\alpha$ para alguns valores fracionários de α.

(a) Mostre que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$.
(b) Mostre que $\mathscr{L}(t^{-1/2}) = \sqrt{\pi/s}$, para $s > 0$.
(c) Mostre que $\mathscr{L}(t^{1/2}) = \sqrt{\pi}/2s^{3/2}$, para $s > 0$.

13. Seja $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função de crescimento exponencial.

(a) Verifique que $(\mathscr{L}f)^{(n)} = \mathscr{L}((-t)^n f(t))$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
(b) Use o item anterior para calcular $\mathscr{L}f(s)$ nos casos a seguir:

i. $f(t) = t^3 \operatorname{sen} t$
ii. $f(t) = t^2 \cos t$
iii. $f(t) = t^2 \sinh t$
iv. $f(t) = t \cosh t$

14. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(1) $y'' - y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
(2) $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
(3) $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
(4) $y^{(iv)} - y = 0$, $y(0) = y''(0) = 0$, $y'(0) = y'''(0) = 1$
(5) $y'' + y = \cos(2t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
(6) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
(7) $y'' + y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$
(8) $y'' - 6y' + 9y = e^t$, $y(0) = y'(0) = 1$

15. Verifique as seguintes igualdades para a transformada de Laplace e a transformada de Laplace inversa:

(a) $\mathscr{L}(f(ct)) = \dfrac{1}{c}\mathscr{L}f\left(\dfrac{s}{c}\right)$;
(b) $\mathscr{L}^{-1}\{Y(ks)\} = \dfrac{1}{k}\mathscr{L}^{-1}Y\left(\dfrac{t}{k}\right)$;

(c) $\mathscr{L}^{-1}\{Y(as+b)\} = \dfrac{e^{-bt/a}}{a}\mathscr{L}^{-1}Y\left(\dfrac{t}{a}\right)$, se $a>0$.

16. Calcule a transformada inversa de Laplace $\mathscr{L}^{-1}Y$:

(1) $Y(s) = \dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{2s}{(s-1)^2}$

(2) $Y(s) = \dfrac{3s+1}{s^2-4s+8}$

(3) $Y(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+13}$

(4) $Y(s) = \dfrac{2s+1}{4s^2+4s+5}$

(5) $Y(s) = \dfrac{1}{9s^2-12s+3}$

(6) $Y(s) = \dfrac{(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$

(7) $Y(s) = \dfrac{2e^{-2s}}{s^2-4}$

(8) $Y(s) = \dfrac{e^{-s}(s-2)}{s^2-4s+3}$

(9) $Y(s) = \dfrac{e^{-4s}}{2s-1}$

17. Esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo e calcule sua transformada de Laplace:

(1) $f(t) = 1 - u_1(t)$

(2) $f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(t)$

(3) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{, em } (0,1)\cup(2,3) \\ 0 & \text{, fora de } (0,1)\cup(2,3) \end{cases}$

(4) $f(t) = |\operatorname{sen} t|$

(5) $f(t) = t$, $0 \le t < 1$, $f(t+1) = f(t)$

(6) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{, em } (0,1) \\ \text{-1} & \text{, em } (1,2) \end{cases}$, $f(t+2) = f(t)$

18. Resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(1) $y'' + y = 1 - u_{\pi/2}(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(2) $y'' + 4y = \operatorname{sen} t - u_{2\pi}(t)\operatorname{sen}(t-2\pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$

(3) $y'' + 4y = \operatorname{sen} t + u_{\pi}(t)\operatorname{sen}(t-\pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$

(4) $y'' + 2y' + y = 1 - u_1(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(5) $y'' + 3y' + 2y = u_2(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(6) $y'' + y = u_{\pi}(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(7) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, onde $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{, em } [0,\pi) \\ 0 & \text{, em } [\pi,2\pi) \end{cases}$, $f(t+2\pi) = f(t)$

(8) $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, onde $f(t) = \begin{cases} t & , \text{em } [0,1) \\ 1 & , \text{em } [1,\infty) \end{cases}$

(9) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$

(10) $y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(11) $y'' + 4y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$

(12) $y'' + 2y' + y = \delta(t) + u_{2\pi}(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(13) $y'' - y = 2\delta(t-1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(14) $y'' + y = \delta(t-\pi)\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

19. Use a transformada de Laplace para calcular as integrais abaixo:

(1) $\displaystyle\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\,dt$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}\,dt$

(3) $\displaystyle\int_0^\infty t^3 e^{-t}\operatorname{sen} t\,dt$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\operatorname{sen} t}{t}\,dt$

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\operatorname{sen}^2 t}{t}\,dt$

(6) $\displaystyle\int_0^\infty te^{-3t}\operatorname{sen} t\,dt$

20. (Função Gamma) A *função Gamma* é definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt,$$

para $x > 0$.

(a) Mostre que Γ é bem-definida, i.e., que a integral acima é convergente para todo $x > 0$.

(b) Use integração por partes para mostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para todo $x > 0$.

(c) Use indução em n para mostrar que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo inteiro $n > 0$. Isso mostra que a função Γ é uma extensão da função fatorial para todos os reais positivos.

(d) Mostre que $\mathscr{L}(t^\alpha)(s) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, para todos $s > 0$ e $\alpha > -1$.