

Sistema de Coordenadas Intrínsecas

Emílio G. F. Mercuri^a

^a*Professor do Departamento de Engenharia Ambiental, Universidade Federal do Paraná,
Curitiba, Paraná*

Resumo

Depois da introdução a cinemática das partículas onde se define os vetores posição, velocidade e aceleração em um sistema de coordenadas cartesiano fixo pode-se generalizar essas definições para outros sistemas de coordenadas, como por exemplo o sistema de coordenadas polares. A escolha do sistema de coordenadas não afeta o resultado final das contas, entretanto, em problemas práticos dependendo da escolha desse sistema os cálculos podem ficar razoavelmente mais simples. Nessa aula iremos detalhar o sistema de coordenadas intrínsecas.

Palavras Chave:

Sistema de coordenadas, Intrínseco, Normal, Tangencial, Binormal

O material apresentado nessa aula é baseado no curso de Dinâmica do MIT, [1]. O movimento de um ponto pode ser descrito pelo seu vetor posição $\mathbf{r}(t)$ cuja posição ao longo de um caminho curvo é dada pela função escalar $s(t)$, sendo que $s(t)$ representa o comprimento de arco ao longo da curva. Pode-se encontrar a velocidade $\mathbf{v}$ pela derivada temporal do vetor $\mathbf{r}(t)$:

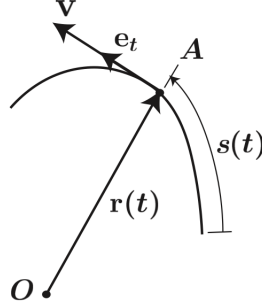
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (1)$$

onde identifica-se o escalar $\dot{s}$ como a magnitude da velocidade v e $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ como o vetor unitário tangente à curva no ponto $s(t)$. Portanto,

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_t \quad (2)$$

sendo $\mathbf{r}(t)$ o vetor posição, $v = \dot{s}$ a velocidade escalar, $\mathbf{e}_t$ o vetor unitário tangente à trajetória e s é a distância percorrida ao longo da trajetória.

e-mail: emilio@ufpr.br (Emílio G. F. Mercuri)



O vetor unitário tangente pode ser escrito como:

$$\mathbf{e}_t = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (3)$$

O vetor aceleração é definido como a derivada temporal do vetor velocidade, portanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\dot{s} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \ddot{s} \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \dot{s} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \ddot{s} \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \dot{s} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \frac{ds}{dt} \\ &= \ddot{s} \frac{d\mathbf{r}}{ds} + \dot{s}^2 \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \dot{v} \frac{d\mathbf{r}}{ds} + v^2 \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \end{aligned} \quad (4)$$

onde $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ é uma propriedade da trajetória, conhecida como raio de curvatura.

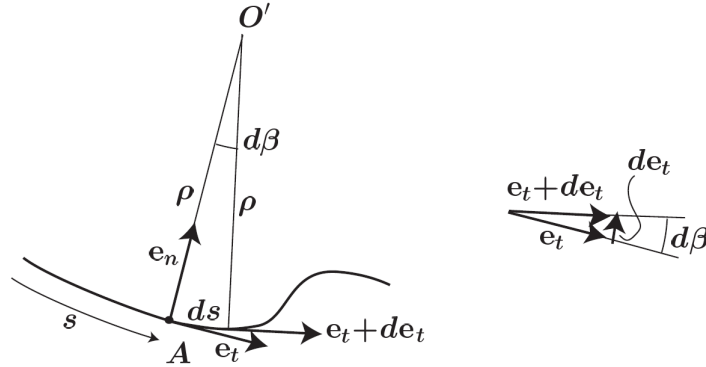
Pela definição de aceleração e da Equação 2, obtém-se:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + v \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} \quad (5)$$

O vetor $\mathbf{e}_t$ é o vetor unitário tangente a curva no tempo t que varia ponto a ponto na trajetória. Consequentemente, a derivada temporal de $\mathbf{e}_t$ é geralmente diferente de zero e, de acordo com a regra da cadeia:

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} v \quad (6)$$

No cálculo da derivada de $\mathbf{e}_t$ nota-se que como a magnitude de $\mathbf{e}_t$ é constante e igual a unidade, a única mudança que $\mathbf{e}_t$ pode ter é rotação ou oscilação.



Quando a partícula se move de s até $s + ds$, o vetor tangente muda de $\mathbf{e}_t$ para $\mathbf{e}_t + d\mathbf{e}_t$. A mudança na direção pode ser atribuída ao ângulo $d\beta$.

A direção de $d\mathbf{e}_t$ (perpendicular a $\mathbf{e}_t$) é conhecida como direção normal. A direção normal é aquela que aponta para o centro de curvatura O' da trajetória ponto a ponto, e é representada pelo versor unitário $\mathbf{e}_n$. Do desenho da direita da figura acima é possível observar que a magnitude de $d\mathbf{e}_t$ é $\|d\mathbf{e}_t\| = \|d\mathbf{e}_t\|d\beta = 1d\beta = d\beta$, ou seja, aproxima-se $\|d\mathbf{e}_t\|$ como um comprimento de arco infinitesimal. Portanto:

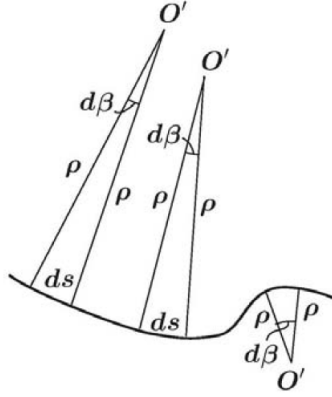
$$d\mathbf{e}_t = d\beta \mathbf{e}_n \quad (7)$$

dividindo toda a equação por ds :

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{ds} = \frac{d\beta}{ds} \mathbf{e}_n = \kappa \mathbf{e}_n = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (8)$$

sendo κ uma propriedade local da curva, chamada *curvatura*, e $\rho = 1/\kappa$ o raio de curvatura.

Como as duas linhas que se encontram em O' são perpendiculares a cada um dos vetores tangentes, o ângulo entre as linhas $d\beta$ será o mesmo que o ângulo entre os vetores $\mathbf{e}_t$ e $\mathbf{e}_t + d\mathbf{e}_t$. A distância entre O' e A é o raio de curvatura, e pode-se escrever que $ds = \rho d\beta$, ou $d\beta/ds = \kappa = 1/\rho$.



Note que o raio de curvatura e o centro de curvatura mudam ponto a ponto na trajetória.

Dois casos limites:

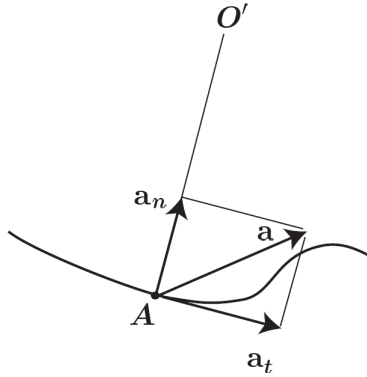
1. A trajetória é um círculo (raio de curvatura = raio do círculo, centro de curvatura = centro do círculo).
2. A trajetória é uma linha reta (a curvatura é zero, o raio de curvatura é infinito e a direção normal não é definida).

Das Equações 6 e 8, temos que:

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\beta}{ds} v \mathbf{e}_n = \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_n = \dot{\beta} \mathbf{e}_n = \frac{v}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (9)$$

A aceleração pode ser escrita como:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n = a_t \mathbf{e}_t + a_n \mathbf{e}_n \quad (10)$$



A componente a_n da aceleração apontando na direção do centro da curvatura é também conhecida como aceleração centrípeta.

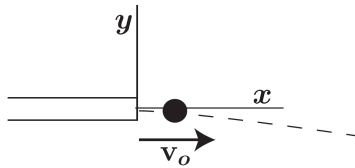
Para $a_t \neq 0 \Rightarrow \mathbf{v}$ muda de magnitude (se alonga ou encurta).

Para $a_n \neq 0 \Rightarrow \mathbf{v}$ muda de direção.

O módulo da aceleração é dado por $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

Exemplo 1

Uma bola é arremessada horizontalmente de um tubo com velocidade v_0 . A única aceleração atuante na bola é a gravidade. Qual o raio de curvatura da trajetória da bola exatamente após o lançamento?



Solução: Inicialmente, a única componente da aceleração diferente de zero é a aceleração normal, $a_n = -g$, portanto, como $a_n = v_0^2/\rho$:

$$\rho = -\frac{v^2}{g}$$

Outra alternativa é escrever as equações da cinemática:

$$\begin{aligned}x &= v_0 t \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

e pode-se eliminar o t :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2$$

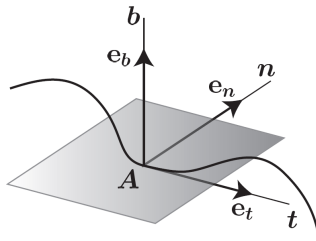
Em $x = 0$ temos que:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{g}{v_0^2}\end{aligned}$$

Como sabemos, $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ é a definição de raio de curvatura, portanto, $\rho = -\frac{v^2}{g}$.

Os vetores $\mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e}_t$ e suas coordenadas respectivas t e n , definem duas direções ortogonais. O plano definido por essas duas direções é chamado de *plano osculante*.

Para definir o sistema completo de eixos tridimensionais móvel é necessário introduzir um vetor unitário adicional que é ortogonal a $\mathbf{e}_n$ e $\mathbf{e}_t$. Esse vetor é chamado de *binormal* e é definido pelo produto vetorial $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$. Portanto, $\mathbf{e}_b \perp \mathbf{e}_n \perp \mathbf{e}_t$.



Em qualquer ponto da trajetória, os vetores velocidade e aceleração podem ser escritos de forma simples:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v\mathbf{e}_t \\ \mathbf{a} &= \dot{v}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n\end{aligned}$$

A dificuldade de trabalhar com o sistema de coordenadas intrínseco é o fato de que a orientação dos eixos depende da própria trajetória. O vetor posição, $\mathbf{r}$, pode ser encontrado pela integração da relação $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v} dt$$

sendo $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$ a condição inicial dada.

Quando a trajetória é planar, a binormal é constante (ortogonal ao plano do movimento). Entretanto, quando a trajetória é curva e ocorre em um espaço tridimensional, a binormal muda com s .

Pode-se mostrar que a derivada da binormal é sempre na direção da normal. A taxa de variação da binormal com relação à trajetória s é chamada de *torção*, τ .

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}_b}{ds} &= -\tau \mathbf{e}_n \\ \frac{d\mathbf{e}_b}{dt} &= -\tau v \mathbf{e}_n\end{aligned}$$

Quando a torção é zero, a trajetória é planar, e quando a curvatura é zero, a trajetória é linear.

Equações de movimento no sistema de coordenadas intrínseco

A segunda lei de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, pode ser escrita em coordenadas intrínsecas. Nas componentes tangencial, normal e binormal, pode-se escrever $\mathbf{F} = F_t \mathbf{e}_t + F_n \mathbf{e}_n$ e $\mathbf{a} = a_t \mathbf{e}_t + a_n \mathbf{e}_n$.

$$F_t = ma_t = m\dot{v} = m\dot{s}$$

$$F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

References

- [1] S. Widnall, J. Peraire, Lecture 16 - intrinsic coordinates, MIT Open Course Ware - Dynamics.