1ª Avaliação de Otimização I **31/03/2015**

1. Determine a taxa de convergência com que a sequência (x^k) definida por
$$x^0 = 1 \qquad \text{e} \qquad x^{k+1} = \sqrt{6 + x^k}$$
converge para 3.

2. (1,5) Determine o polinômio de Taylor de segunda ordem, em torno da origem, da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x, y) = 1 + x \cos y + y \operatorname{sen} x.$$

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2$. Determine todos os pontos estacionários de f e classifique-os em minimizador, maximizador ou sela.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = \cos(3x^2 + 5z^2) + 7y$ e o conjunto $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| \leq 1\}$. Pergunta-se:
   (a) A função f tem minimizador em $\mathbb{R}^3$? Justifique sua resposta.
   (b) A função f tem minimizador em B? Justifique sua resposta.

5. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa diferenciável. Sabe-se que, neste caso, f satisfaz a desigualdade abaixo, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,
$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x).$$
   (a) Faça uma figura elucidativa da desigualdade acima.
   (b) Prove que se x^* é minimizador local de f, então x^* é minimizador global de f.

6. Faça uma figura que contenha:
   (a) o esboço do gráfico das curvas de nível de um função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e de um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ convexo e fechado.
   (b) $a = proj_C(x^* - \nabla f(x^*))$, onde x^* é uma solução do problema de minimizar f em C.
   (c) $b = proj_C(\bar{x} - \nabla f(\bar{x}))$, onde $\bar{x}$ é um ponto fronteira de C que não é solução do problema de minimizar f em C.