2ª Avaliação de Otimização I **21/05/2015**

1. Considere a função quadrática $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{2}x^T Ax$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica definida positiva. Suponha que x_0 é um autovetor de A, com autovalor $\lambda > 0$ e que x_1 é obtido a partir de x_0 pelo método do gradiente com busca exata. Pede-se:

   (a) Obtenha uma expressão, em função de λ, para a direção d_0 do método do gradiente.

   (b) Calcule o comprimento do passo pela busca exata para obtenção de x_1 a partir de x_0 na direção d_0.
   Lembrete: $t = -\dfrac{\nabla f(x_0)^T d_0}{d_0^T A d_0}$.

   (c) Conclua que $x_1 = 0$.

   (d) Faça uma figura elucidativa.

2. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e uma direção de descida $\bar{d} \in \mathbb{R}^n$ a partir de $\bar{x}$. Seja $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(t) = f(\bar{x} + t\bar{d})$. Dado $\eta \in [0,1]$, dizemos que o comprimento do passo t satisfaz a condição de decréscimo suficiente de Armijo quando:

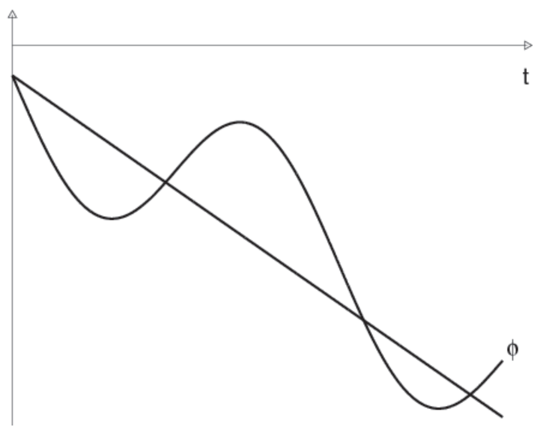
$$\phi(t) < \phi(0) + \eta\phi'(0)t.$$

   Pede-se:

   (a) Calcule $\phi'(0)$.

   (b) Reescreva a condição de Armijo com a notação da função f.

   (c) A figura abaixo ilustra o gráfico de ϕ e a reta referente ao lado direito da desigualdade de Armijo com $\eta = 0.3$. Assinale na figura todos os valores de t que satisfazem a condição de Armijo, com este valor de η.



   (d) Se diminuirmos o valor de η, o critério se torna mais ou menos restritivo? Justifique sua resposta, traçando uma reta correspondente ao lado direito da desigualdade de Armijo com $\eta < 0.3$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Considere x_{k+1} o ponto obtido a partir de $x_k \in \mathbb{R}^n$ pelo método do gradiente com busca exata. Mostre que $\nabla f(x_{k+1})$ é ortogonal a $\nabla f(x_k)$. Faça uma figura elucidativa deste resultado.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x_1^4 + x_2^2 - 2x_2 + 7$ e $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ um ponto inicial. Faça uma iteração do método de Newton, com passo unitário, para minimizar f a partir do ponto x^0.

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica definida positiva. No método de gradientes conjugados, a direção d_{k+1} é obtida a partir de d_k pela combinação linear

$$d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \beta_k d_k$$

de modo que d_k e d_{k+1} sejam A-conjugadas. Obtenha uma expressão para β_k.

6. Num método quase-Newton, a direção de busca d_k é da forma

$$d_k = -H_k \nabla f(x_k),$$

onde $H_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica. Mostre que se H_k é definida positiva, então d_k é uma direção de descida.