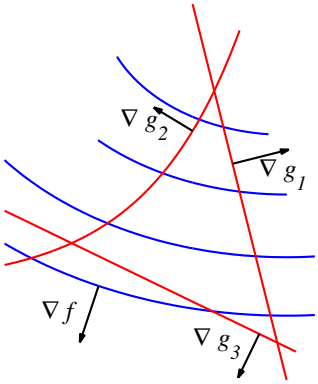
1. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e o conjunto viável $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) \leq 0\}$. Na figura estão representadas as curvas de nível da função objetivo f e a região viável Ω. Pede-se:

   (a) Assinale na figura o minimizador x^* de f em Ω.

   (b) Represente geometricamente a condição de otimalidade de KKT.

   (c) Quais os multiplicadores de Lagrange associados a x^* que são nulos?

   (d) Assinale na figura o maximizador $\tilde{x}$ de f em Ω.



2. Considere o problema: $\begin{array}{ll} \text{minimizar} & (x-3)^2 + (y-2)^2 \\ \text{sujeito a} & x + y = 3 \end{array}$. Pede-se:

   (a) Determine uma direção viável a partir do ponto $(3, 0)$ que seja de descida em relação à função objetivo.

   (b) Faça uma busca exata para minimização da função objetivo a partir do ponto $(3, 0)$ na direção obtida no item anterior.

   (c) Verifique que o ponto obtido satisfaz as condições de KKT.

   (d) Verifique que o ponto obtido satisfaz a condição de otimalidade de segunda ordem.

3. Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica não singular, $b \in \mathbb{R}$ e o problema (P) de otimização:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \dfrac{1}{2}\|x\|^2 \\ \text{sujeito a} & x^T A x = b. \end{array}$$

   Pede-se:

   (a) Escreva as condições de KKT para o problema.

   (b) Mostre que as soluções do problema são autovetores de A, determinando o autovalor correspondente.

   (c) Considerando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{25} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = 1,$$

   faça uma figura elucidativa do problema (P) e de suas soluções.

4. Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com $16\,m^3$ de volume e com a forma de um paralelepípedo retângulo. O custo unitário do material a ser utilizado na confecção das **laterais é o dobro** do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimizam o custo do material.

5. Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & x \\ \text{sujeito a} & y - (x-1)^3 \leq 0 \\ & y \geq 0 \end{array}$$

(a) Determine, graficamente, a solução do problema.

(b) Escreva as condições de KKT do problema.

(c) Verifique se existem os multiplicadores de Lagrange associados à solução do problema.

(d) Isso contradiz o Teorema de KKT? Justifique sua resposta.