Otimização Contínua: Aspectos teóricos e computacionais

Ademir Alves Ribeiro
Elizabeth Wegner Karas

Capítulo 1 - Revisão de conceitos

Definição

Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação

$$k \in \mathbb{N} \mapsto x^k \in \mathbb{R}^n,$$

definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Denotaremos uma sequência por $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente por (x^k).

Ponto limite de uma sequência

Definição

Dizemos que o ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é o limite da sequência (x^k) quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq \bar{k} \Rightarrow \|x^k - \bar{x}\| < \varepsilon.$$

- Neste caso, dizemos que a sequência (x^k) converge para $\bar{x}$.
- $\lim_{k \to \infty} x^k = \bar{x}$.

CENGAGE Learning

Subsequência

Definição

Uma subsequência de (x^k) é a restrição desta sequência a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{k_0 < k_1 < \ldots < k_i < \ldots\} \subset \mathbb{N}$.

Equivalentemente, uma subsequência de (x^k) é uma sequência do tipo:

- $(x^k)_{k \in \mathbb{N}'}$

  ou

- $(x^{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$, onde $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de inteiros positivos.

Subsequência

Teorema

Se uma sequência (x^k) converge para um limite $\bar{x}$, então toda subsequência $(x^{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ também converge para $\bar{x}$.

O limite de uma subsequência $(x^k)_{k \in \mathbb{N}'}$ é chamado valor de aderência ou ponto de acumulação da sequência (x^k).

Ponto de acumulação de uma sequência

Exemplo

$$x^k = (-1)^k + \frac{1}{k+1}$$

Pontos de acumulação: 1 e -1.

De fato, $x^{2i} \to 1$ e $x^{2i+1} \to -1$.

Ponto de acumulação de uma sequência

Exemplo

$$x^k = (-1)^k + \frac{1}{k+1}$$

Pontos de acumulação: 1 e -1.

De fato, $x^{2i} \to 1$ e $x^{2i+1} \to -1$.

Exemplo

$$x^k = (-1)^k + \frac{1}{k+1}$$

Pontos de acumulação: 1 e -1.

De fato, $x^{2i} \to 1$ e $x^{2i+1} \to -1$.

Ponto de acumulação de uma sequência

Exemplo

$$x^k = (-1)^k + \frac{1}{k+1}$$

Pontos de acumulação: 1 e -1.
De fato, $x^{2i} \to 1$ e $x^{2i+1} \to -1$.

Ponto de acumulação de uma sequência

Exemplo

$$\left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots\right)$$

Pontos de acumulação: 0.

Entretanto, a sequência não é convergente.

Exemplo

$$\left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots\right)$$

Pontos de acumulação: 0.

Entretanto, a sequência não é convergente.

Ponto de acumulação de uma sequência

Exemplo

$$\left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots\right)$$

Pontos de acumulação: 0.

Entretanto, a sequência não é convergente.

Ponto de acumulação de uma sequência

Exemplo

$$\left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots\right)$$

Pontos de acumulação: 0.
Entretanto, a sequência não é convergente.

Preservação do sinal

Resultado

Considere uma sequência $(t_k) \subset \mathbb{R}$ tal que $t_k \to \bar{t}$.
Dado $\alpha < \bar{t}$, existe $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq \bar{k}$ tem-se

$$t_k > \alpha.$$

De fato, para $\varepsilon = \bar{t} - \alpha > 0$, existe $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq \bar{k}$ tem-se

$$|t_k - \bar{t}| < \varepsilon.$$

Assim, $t_k > \alpha$.

Preservação do sinal

Resultado

Considere uma sequência $(t_k) \subset \mathbb{R}$ tal que $t_k \to \bar{t}$.
Dado $\alpha < \bar{t}$, existe $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq \bar{k}$ tem-se

$$t_k > \alpha.$$

De fato, para $\varepsilon = \bar{t} - \alpha > 0$, existe $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq \bar{k}$ tem-se

$$|t_k - \bar{t}| < \varepsilon.$$

Assim, $t_k > \alpha$.

Definição

Uma sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ é limitada, quando o conjunto formado pelos seus elementos é limitado, ou seja, quando existe um número real $M > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x^k\| \leq M.$$

Resultados

- Toda sequência convergente é limitada.
- Teorema de Bolzano-Weierstrass
  Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.
- Uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ é convergente se, e somente se, possui um único ponto de acumulação.

Sequência limitada

Definição

Uma sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ é limitada, quando o conjunto formado pelos seus elementos é limitado, ou seja, quando existe um número real $M > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x^k\| \leq M.$$

Resultados

- Toda sequência convergente é limitada.
- Teorema de Bolzano-Weierstrass
  Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.
- Uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ é convergente se, e somente se, possui um único ponto de acumulação.

Sequência limitada

Definição

Uma sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ é limitada, quando o conjunto formado pelos seus elementos é limitado, ou seja, quando existe um número real $M > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x^k\| \leq M.$$

Resultados

- Toda sequência convergente é limitada.
- Teorema de Bolzano-Weierstrass
  Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.
- Uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ é convergente se, e somente se, possui um único ponto de acumulação.

Definição

Uma sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ é limitada, quando o conjunto formado pelos seus elementos é limitado, ou seja, quando existe um número real $M > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x^k\| \leq M.$$

Resultados

- Toda sequência convergente é limitada.
- Teorema de Bolzano-Weierstrass
  Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.
- Uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ é convergente se, e somente se, possui um único ponto de acumulação.

Sequência limitada

Definição

Uma sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ é limitada, quando o conjunto formado pelos seus elementos é limitado, ou seja, quando existe um número real $M > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\|x^k\| \leq M.$$

Resultados

- Toda sequência convergente é limitada.
- Teorema de Bolzano-Weierstrass
  Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.
- Uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ é convergente se, e somente se, possui um único ponto de acumulação.

Sequência monótona

Definição

A sequência (x^k) é não-decrescente quando $x^{k+1} \geq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e é não-crescente quando $x^{k+1} \leq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Se as desigualdades forem estritas, diremos que (x^k) é crescente no primeiro caso e decrescente no segundo.
Em qualquer uma destas situações a sequência (x^k) é dita monótona.

Resultados

- Toda sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}$ monótona limitada é convergente.
- Seja $(x^k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência monótona que possui uma subsequência convergente, digamos $x^k \xrightarrow{\mathbb{N}'} \bar{x}$. Então $x^k \to \bar{x}$.

Sequência monótona

Definição

A sequência (x^k) é não-decrescente quando $x^{k+1} \geq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e é não-crescente quando $x^{k+1} \leq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Se as desigualdades forem estritas, diremos que (x^k) é crescente no primeiro caso e decrescente no segundo.
Em qualquer uma destas situações a sequência (x^k) é dita monótona.

Resultados

- Toda sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}$ monótona limitada é convergente.
- Seja $(x^k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência monótona que possui uma subsequência convergente, digamos $x^k \xrightarrow{\mathbb{N}'} \bar{x}$. Então $x^k \to \bar{x}$.

Sequência monótona

Definição

A sequência (x^k) é não-decrescente quando $x^{k+1} \geq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e é não-crescente quando $x^{k+1} \leq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Se as desigualdades forem estritas, diremos que (x^k) é crescente no primeiro caso e decrescente no segundo.
Em qualquer uma destas situações a sequência (x^k) é dita monótona.

Resultados

- Toda sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}$ monótona limitada é convergente.
- Seja $(x^k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência monótona que possui uma subsequência convergente, digamos $x^k \xrightarrow{\mathbb{N}'} \bar{x}$. Então $x^k \to \bar{x}$.

Definição

A sequência (x^k) é não-decrescente quando $x^{k+1} \geq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e é não-crescente quando $x^{k+1} \leq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Se as desigualdades forem estritas, diremos que (x^k) é crescente no primeiro caso e decrescente no segundo.
Em qualquer uma destas situações a sequência (x^k) é dita monótona.

Resultados

- Toda sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}$ monótona limitada é convergente.
- Seja $(x^k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência monótona que possui uma subsequência convergente, digamos $x^k \xrightarrow{\mathbb{N}'} \bar{x}$. Então $x^k \to \bar{x}$.

Sequência monótona

Definição

A sequência (x^k) é não-decrescente quando $x^{k+1} \geq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e é não-crescente quando $x^{k+1} \leq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Se as desigualdades forem estritas, diremos que (x^k) é crescente no primeiro caso e decrescente no segundo.
Em qualquer uma destas situações a sequência (x^k) é dita monótona.

Resultados

- Toda sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}$ monótona limitada é convergente.
- Seja $(x^k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência monótona que possui uma subsequência convergente, digamos $x^k \xrightarrow{\mathbb{N}'} \bar{x}$. Então $x^k \to \bar{x}$.

Sequência monótona

Definição

A sequência (x^k) é não-decrescente quando $x^{k+1} \geq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e é não-crescente quando $x^{k+1} \leq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Se as desigualdades forem estritas, diremos que (x^k) é crescente no primeiro caso e decrescente no segundo.
Em qualquer uma destas situações a sequência (x^k) é dita monótona.

Resultados

- Toda sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}$ monótona limitada é convergente.
- Seja $(x^k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência monótona que possui uma subsequência convergente, digamos $x^k \xrightarrow{\mathbb{N}'} \bar{x}$. Então $x^k \to \bar{x}$.

CENGAGE Learning

Sequência monótona

Definição

A sequência (x^k) é não-decrescente quando $x^{k+1} \geq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e é não-crescente quando $x^{k+1} \leq x^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Se as desigualdades forem estritas, diremos que (x^k) é crescente no primeiro caso e decrescente no segundo.
Em qualquer uma destas situações a sequência (x^k) é dita monótona.

Resultados

- Toda sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}$ monótona limitada é convergente.
- Seja $(x^k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência monótona que possui uma subsequência convergente, digamos $x^k \xrightarrow{\mathbb{N}'} \bar{x}$. Então $x^k \to \bar{x}$.

CENGAGE Learning

Definição

Seja $(x^k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência limitada.
O limite inferior da sequência (x^k) é seu menor ponto de acumulação e denotamos por $\liminf x^k$.
Analogamente definimos o limite superior da sequência como seu maior ponto de acumulação e denotamos por $\limsup x^k$.

Exemplo

- $(x^k) = (1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots)$
  $\liminf x^k = 1$ e $\limsup x^k = 3$.

Limite inferior e superior de uma sequência na reta

Definição

Seja $(x^k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência limitada.
O limite inferior da sequência (x^k) é seu menor ponto de acumulação e denotamos por $\liminf x^k$.
Analogamente definimos o limite superior da sequência como seu maior ponto de acumulação e denotamos por $\limsup x^k$.

Exemplo

- $(x^k) = (1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$
  $\liminf x^k = 1 \quad$ e $\quad \limsup x^k = 3.$

Definição

Seja $(x^k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência limitada.
O limite inferior da sequência (x^k) é seu menor ponto de acumulação e denotamos por $\liminf x^k$.
Analogamente definimos o limite superior da sequência como seu maior ponto de acumulação e denotamos por $\limsup x^k$.

Exemplo

- $(x^k) = (1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$
  $\liminf x^k = 1$ e $\limsup x^k = 3$.

Definição

Seja $(x^k) \subset \mathbb{R}$ uma sequência limitada.
O limite inferior da sequência (x^k) é seu menor ponto de acumulação e denotamos por $\liminf x^k$.
Analogamente definimos o limite superior da sequência como seu maior ponto de acumulação e denotamos por $\limsup x^k$.

Exemplo

- $(x^k) = (1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots)$
  $\liminf x^k = 1$ e $\limsup x^k = 3.$

Definição

Considere as sequências $(v^k) \subset \mathbb{R}^n$ e $(\lambda_k) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, com $\lambda_k \to 0$.

Dizemos que $v^k = o(\lambda_k)$ quando $\dfrac{v^k}{\lambda_k} \to 0$.

Mais geralmente, considere $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.
Dizemos que $g(\lambda) = o(\lambda)$ quando $g(\lambda_k) = o(\lambda_k)$, para toda sequência $(\lambda_k) \subset I$ com $\lambda_k \to 0$.

Definição

Considere as sequências $(v^k) \subset \mathbb{R}^n$ e $(\lambda_k) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, com $\lambda_k \to 0$.

Dizemos que $v^k = o(\lambda_k)$ quando $\dfrac{v^k}{\lambda_k} \to 0$.

Mais geralmente, considere $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.
Dizemos que $g(\lambda) = o(\lambda)$ quando $g(\lambda_k) = o(\lambda_k)$, para toda sequência $(\lambda_k) \subset I$ com $\lambda_k \to 0$.

Considere as sequências

$$x^k = \frac{1}{k+6}, \qquad y^k = \frac{1}{3^k}, \qquad w^k = \frac{1}{2^{k^2}} \quad \text{e} \quad z^k = \frac{1}{2^{2^k}}.$$

Todas elas convergem para 0, mas não com a mesma velocidade.

k	0	1	2	3	4	5	6
x^k	0,1667	0,1429	0,1250	0,1111	0,1000	0,0909	0,0833
y^k	1,0000	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,0041	0,0014
w^k	1,0000	0,5000	0,0625	0,0020	$1,5\times10^{-5}$	3×10^{-8}	$1,4\times10^{-11}$
z^k	0,5000	0,2500	0,0625	0,0039	$1,5\times10^{-5}$	$2,3\times10^{-10}$	$5,4\times10^{-20}$

Tabela: Termos iniciais das sequências.

Considere as sequências

$$x^k = \frac{1}{k+6}, \qquad y^k = \frac{1}{3^k}, \qquad w^k = \frac{1}{2^{k^2}} \quad \text{e} \quad z^k = \frac{1}{2^{2^k}}.$$

Todas elas convergem para 0, mas não com a mesma velocidade.

k	0	1	2	3	4	5	6
x^k	0,1667	0,1429	0,1250	0,1111	0,1000	0,0909	0,0833
y^k	1,0000	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,0041	0,0014
w^k	1,0000	0,5000	0,0625	0,0020	$1{,}5\times10^{-5}$	3×10^{-8}	$1{,}4\times10^{-11}$
z^k	0,5000	0,2500	0,0625	0,0039	$1{,}5\times10^{-5}$	$2{,}3\times10^{-10}$	$5{,}4\times10^{-20}$

Tabela: Termos iniciais das sequências.

Considere as sequências

$$x^k = \frac{1}{k+6}, \qquad y^k = \frac{1}{3^k}, \qquad w^k = \frac{1}{2^{k^2}} \quad \text{e} \qquad z^k = \frac{1}{2^{2^k}}.$$

Todas elas convergem para 0, mas não com a mesma velocidade.

k	0	1	2	3	4	5	6
x^k	0,1667	0,1429	0,1250	0,1111	0,1000	0,0909	0,0833
y^k	1,0000	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,0041	0,0014
w^k	1,0000	0,5000	0,0625	0,0020	1,5$\times 10^{-5}$	3$\times 10^{-8}$	1,4$\times 10^{-11}$
z^k	0,5000	0,2500	0,0625	0,0039	1,5$\times 10^{-5}$	2,3$\times 10^{-10}$	5,4$\times 10^{-20}$

Tabela: Termos iniciais das sequências.

Convergência linear

Definição

Uma sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ converge linearmente para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, com razão de convergência $r \in [0,1)$, quando

$$\limsup \frac{\|x^{k+1} - \bar{x}\|}{\|x^k - \bar{x}\|} = r.$$

- $x^k = \dfrac{1}{k+6}$ converge para 0 mas não linearmente. De fato,

$$\frac{\|x^{k+1}\|}{\|x^k\|} = \frac{k+6}{k+7} \to 1.$$

- $y^k = \dfrac{1}{3^k}$ converge linearmente para 0, pois

$$\frac{\|y^{k+1}\|}{\|y^k\|} = \frac{1}{3}.$$

Definição

Uma sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ converge linearmente para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, com razão de convergência $r \in [0,1)$, quando

$$\limsup \frac{\|x^{k+1} - \bar{x}\|}{\|x^k - \bar{x}\|} = r.$$

- $x^k = \dfrac{1}{k+6}$ converge para 0 mas não linearmente. De fato,

$$\frac{\|x^{k+1}\|}{\|x^k\|} = \frac{k+6}{k+7} \to 1.$$

- $y^k = \dfrac{1}{3^k}$ converge linearmente para 0, pois

$$\frac{\|y^{k+1}\|}{\|y^k\|} = \frac{1}{3}.$$

Definição

Uma sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ converge linearmente para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, com razão de convergência $r \in [0,1)$, quando

$$\limsup \frac{\|x^{k+1} - \bar{x}\|}{\|x^k - \bar{x}\|} = r.$$

- $x^k = \dfrac{1}{k+6}$ converge para 0 mas não linearmente. De fato,

$$\frac{\|x^{k+1}\|}{\|x^k\|} = \frac{k+6}{k+7} \to 1.$$

- $y^k = \dfrac{1}{3^k}$ converge linearmente para 0, pois

$$\frac{\|y^{k+1}\|}{\|y^k\|} = \frac{1}{3}.$$

Convergência superlinear

Definição

Uma sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ converge superlinearmente para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ quando

$$\frac{\|x^{k+1} - \bar{x}\|}{\|x^k - \bar{x}\|} \to 0.$$

- A sequência $w^k = \dfrac{1}{2^{k^2}}$ converge superlinearmente para 0, pois

$$\frac{\|w^{k+1}\|}{\|w^k\|} = \frac{2^{k^2}}{2^{(k+1)^2}} = \frac{1}{2^{2k+1}} \to 0.$$

A convergência superlinear implica na convergência linear.

CENGAGE Learning

Convergência superlinear

Definição

Uma sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ converge superlinearmente para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ quando

$$\frac{\|x^{k+1} - \bar{x}\|}{\|x^k - \bar{x}\|} \to 0.$$

- A sequência $w^k = \dfrac{1}{2^{k^2}}$ converge superlinearmente para 0, pois

$$\frac{\|w^{k+1}\|}{\|w^k\|} = \frac{2^{k^2}}{2^{(k+1)^2}} = \frac{1}{2^{2k+1}} \to 0.$$

A convergência superlinear implica na convergência linear.

Definição

Uma sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ converge superlinearmente para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ quando

$$\frac{\|x^{k+1} - \bar{x}\|}{\|x^k - \bar{x}\|} \to 0.$$

- A sequência $w^k = \dfrac{1}{2^{k^2}}$ converge superlinearmente para 0, pois

$$\frac{\|w^{k+1}\|}{\|w^k\|} = \frac{2^{k^2}}{2^{(k+1)^2}} = \frac{1}{2^{2k+1}} \to 0.$$

A convergência superlinear implica na convergência linear.

CENGAGE Learning

Convergência quadrática

Definição

Uma sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ converge quadraticamente para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ quando $x^k \to \bar{x}$ e existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\frac{\|x^{k+1} - \bar{x}\|}{\|x^k - \bar{x}\|^2} \leq M.$$

- A sequência $z^k = \dfrac{1}{2^{2^k}}$ converge quadraticamente para 0, pois

$$\frac{\|z^{k+1}\|}{\|z^k\|^2} = \frac{(2^{2^k})^2}{2^{2^{k+1}}} = 1.$$

A convergência quadrática implica na convergência superlinear.

CENGAGE Learning

Convergência quadrática

Definição

Uma sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ converge quadraticamente para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ quando $x^k \to \bar{x}$ e existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\frac{\|x^{k+1} - \bar{x}\|}{\|x^k - \bar{x}\|^2} \leq M.$$

- A sequência $z^k = \dfrac{1}{2^{2^k}}$ converge quadraticamente para 0, pois

$$\frac{\|z^{k+1}\|}{\|z^k\|^2} = \frac{(2^{2^k})^2}{2^{2^{k+1}}} = 1.$$

A convergência quadrática implica na convergência superlinear.

Convergência quadrática

Definição

Uma sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ converge quadraticamente para $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ quando $x^k \to \bar{x}$ e existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\frac{\|x^{k+1} - \bar{x}\|}{\|x^k - \bar{x}\|^2} \leq M.$$

- A sequência $z^k = \dfrac{1}{2^{2^k}}$ converge quadraticamente para 0, pois

$$\frac{\|z^{k+1}\|}{\|z^k\|^2} = \frac{(2^{2^k})^2}{2^{2^{k+1}}} = 1.$$

A convergência quadrática implica na convergência superlinear.

CENGAGE Learning

Convergência superlinear não implica quadrática

Exemplo

- A sequência $x^k = \dfrac{1}{k!}$ converge superlinearmente mas não quadraticamente para 0.

- Convergência é superlinear

$$\frac{\|x^{k+1}\|}{\|x^k\|} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to 0.$$

- Convergência não é quadrática

$$\frac{\|x^{k+1}\|}{\|x^k\|^2} = \frac{(k!)^2}{(k+1)!} = \frac{k!}{k+1} = \frac{k}{k+1}(k-1)! \to \infty.$$

Exemplo

Considere a sequência (x^k) definida por $x^0 = \dfrac{1}{2}$ e $x^{k+1} = x^k\left(x^k + \dfrac{1}{10}\right)$.

- Mostre que a sequência é convergente.

  Podemos ver por indução que $0 \leq x^k < \dfrac{9}{10}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$x^{k+1} = x^k\left(x^k + \frac{1}{10}\right) < x^k\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right) = x^k.$$

  (x^k) é monótona e limitada, logo é convergente, digamos $x^k \to \bar{x}$.

- Calcule seu ponto limite. Aplicando o limite na sequência, $\bar{x} = \bar{x}\left(\bar{x} + \dfrac{1}{10}\right)$, donde segue que $\bar{x} = 0$ ou $\bar{x} = \dfrac{9}{10}$. Como $x^0 = \dfrac{1}{2}$ e (x^k) é decrescente, $\bar{x} = 0$.

- Determine a ordem de convergência. Linear com razão $\dfrac{1}{10}$, pois

$$\frac{x^{k+1}}{x^k} = x^k + \frac{1}{10} \to \frac{1}{10}.$$

Exemplo

Considere a sequência (x^k) definida por $x^0 = \dfrac{1}{2}$ e $x^{k+1} = x^k\left(x^k + \dfrac{1}{10}\right)$.

- Mostre que a sequência é convergente.

  Podemos ver por indução que $0 \leq x^k < \dfrac{9}{10}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$x^{k+1} = x^k\left(x^k + \frac{1}{10}\right) < x^k\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right) = x^k.$$

  (x^k) é monótona e limitada, logo é convergente, digamos $x^k \to \bar{x}$.

- Calcule seu ponto limite. Aplicando o limite na sequência, $\bar{x} = \bar{x}\left(\bar{x} + \dfrac{1}{10}\right)$, donde segue que $\bar{x} = 0$ ou $\bar{x} = \dfrac{9}{10}$. Como $x^0 = \dfrac{1}{2}$ e (x^k) é decrescente, $\bar{x} = 0$.

- Determine a ordem de convergência. Linear com razão $\dfrac{1}{10}$, pois

$$\frac{x^{k+1}}{x^k} = x^k + \frac{1}{10} \to \frac{1}{10}.$$

Exemplo

Considere a sequência (x^k) definida por $x^0 = \dfrac{1}{2}$ e $x^{k+1} = x^k\left(x^k + \dfrac{1}{10}\right)$.

- Mostre que a sequência é convergente.

  Podemos ver por indução que $0 \leq x^k < \dfrac{9}{10}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto,

  $$x^{k+1} = x^k\left(x^k + \frac{1}{10}\right) < x^k\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right) = x^k.$$

  (x^k) é monótona e limitada, logo é convergente, digamos $x^k \to \bar{x}$.

- Calcule seu ponto limite. Aplicando o limite na sequência, $\bar{x} = \bar{x}\left(\bar{x} + \dfrac{1}{10}\right)$, donde segue que $\bar{x} = 0$ ou $\bar{x} = \dfrac{9}{10}$. Como $x^0 = \dfrac{1}{2}$ e (x^k) é decrescente, $\bar{x} = 0$.

- Determine a ordem de convergência. Linear com razão $\dfrac{1}{10}$, pois

  $$\frac{x^{k+1}}{x^k} = x^k + \frac{1}{10} \to \frac{1}{10}.$$

Exemplo

Considere a sequência (x^k) definida por $x^0 = \dfrac{1}{2}$ e $x^{k+1} = x^k\left(x^k + \dfrac{1}{10}\right)$.

- Mostre que a sequência é convergente.

  Podemos ver por indução que $0 \le x^k < \dfrac{9}{10}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto,

  $$x^{k+1} = x^k\left(x^k + \frac{1}{10}\right) < x^k\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right) = x^k.$$

  (x^k) é monótona e limitada, logo é convergente, digamos $x^k \to \bar{x}$.

- Calcule seu ponto limite. Aplicando o limite na sequência, $\bar{x} = \bar{x}\left(\bar{x} + \dfrac{1}{10}\right)$, donde segue que $\bar{x} = 0$ ou $\bar{x} = \dfrac{9}{10}$. Como $x^0 = \dfrac{1}{2}$ e (x^k) é decrescente, $\bar{x} = 0$.

- Determine a ordem de convergência. Linear com razão $\dfrac{1}{10}$, pois

  $$\frac{x^{k+1}}{x^k} = x^k + \frac{1}{10} \to \frac{1}{10}.$$

Exemplo

Considere a sequência (x^k) definida por $x^0 = \dfrac{1}{2}$ e $x^{k+1} = x^k\left(x^k + \dfrac{1}{10}\right)$.

- Mostre que a sequência é convergente.

  Podemos ver por indução que $0 \leq x^k < \dfrac{9}{10}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto,

  $$x^{k+1} = x^k\left(x^k + \frac{1}{10}\right) < x^k\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right) = x^k.$$

  (x^k) é monótona e limitada, logo é convergente, digamos $x^k \to \bar{x}$.

- Calcule seu ponto limite. Aplicando o limite na sequência, $\bar{x} = \bar{x}\left(\bar{x} + \dfrac{1}{10}\right)$,

  donde segue que $\bar{x} = 0$ ou $\bar{x} = \dfrac{9}{10}$. Como $x^0 = \dfrac{1}{2}$ e (x^k) é decrescente, $\bar{x} = 0$.

- Determine a ordem de convergência. Linear com razão $\dfrac{1}{10}$, pois

  $$\frac{x^{k+1}}{x^k} = x^k + \frac{1}{10} \to \frac{1}{10}.$$

Exemplo

Considere a sequência (x^k) definida por $x^0 = \dfrac{1}{2}$ e $x^{k+1} = x^k\left(x^k + \dfrac{1}{10}\right)$.

- Mostre que a sequência é convergente.

  Podemos ver por indução que $0 \leq x^k < \dfrac{9}{10}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto,

  $$x^{k+1} = x^k\left(x^k + \frac{1}{10}\right) < x^k\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right) = x^k.$$

  (x^k) é monótona e limitada, logo é convergente, digamos $x^k \to \bar{x}$.

- Calcule seu ponto limite. Aplicando o limite na sequência, $\bar{x} = \bar{x}\left(\bar{x} + \dfrac{1}{10}\right)$,

  donde segue que $\bar{x} = 0$ ou $\bar{x} = \dfrac{9}{10}$. Como $x^0 = \dfrac{1}{2}$ e (x^k) é decrescente, $\bar{x} = 0$.

- Determine a ordem de convergência. Linear com razão $\dfrac{1}{10}$, pois

  $$\frac{x^{k+1}}{x^k} = x^k + \frac{1}{10} \to \frac{1}{10}.$$

Exemplo

Considere a sequência (x^k) definida por $x^0 = \dfrac{1}{2}$ e $x^{k+1} = x^k\left(x^k + \dfrac{1}{10}\right)$.

- Mostre que a sequência é convergente.

  Podemos ver por indução que $0 \leq x^k < \dfrac{9}{10}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto,

  $$x^{k+1} = x^k\left(x^k + \frac{1}{10}\right) < x^k\left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right) = x^k.$$

  (x^k) é monótona e limitada, logo é convergente, digamos $x^k \to \bar{x}$.

- Calcule seu ponto limite. Aplicando o limite na sequência, $\bar{x} = \bar{x}\left(\bar{x} + \dfrac{1}{10}\right)$,

  donde segue que $\bar{x} = 0$ ou $\bar{x} = \dfrac{9}{10}$. Como $x^0 = \dfrac{1}{2}$ e (x^k) é decrescente, $\bar{x} = 0$.

- Determine a ordem de convergência. Linear com razão $\dfrac{1}{10}$, pois

  $$\frac{x^{k+1}}{x^k} = x^k + \frac{1}{10} \to \frac{1}{10}.$$

Exemplo

Considere $0 < r < s < 1$ e a sequência (x^k) definida por $x^0 = 1$ e

$$x^{k+1} = \begin{cases} rx^k, & \text{se } k \text{ é par} \\ sx^k, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

- Mostre que a sequência é convergente. Note que $x^{k+1} < x^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $0 \leq x^k \leq x^0$. Sendo (x^k) decrescente e limitada, concluímos que é convergente, digamos $x^k \to \bar{x}$.
- Calcule seu ponto limite. Como $\bar{x} = r\bar{x}$, segue que $\bar{x} = 0$.
- Determine a ordem de convergência. Como

$$\limsup \frac{x^{k+1}}{x^k} = s < 1,$$

temos que a convergência é linear com razão s.

Exemplo

Considere $0 < r < s < 1$ e a sequência (x^k) definida por $x^0 = 1$ e

$$x^{k+1} = \begin{cases} rx^k, & \text{se } k \text{ é par} \\ sx^k, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

- Mostre que a sequência é convergente. Note que $x^{k+1} < x^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $0 \leq x^k \leq x^0$. Sendo (x^k) decrescente e limitada, concluímos que é convergente, digamos $x^k \to \bar{x}$.
- Calcule seu ponto limite. Como $\bar{x} = r\bar{x}$, segue que $\bar{x} = 0$.
- Determine a ordem de convergência. Como

$$\limsup \frac{x^{k+1}}{x^k} = s < 1,$$

temos que a convergência é linear com razão s.

Considere $0 < r < s < 1$ e a sequência (x^k) definida por $x^0 = 1$ e

$$x^{k+1} = \begin{cases} rx^k, & \text{se } k \text{ é par} \\ sx^k, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

- Mostre que a sequência é convergente. Note que $x^{k+1} < x^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $0 \leq x^k \leq x^0$. Sendo (x^k) decrescente e limitada, concluímos que é convergente, digamos $x^k \to \bar{x}$.
- Calcule seu ponto limite. Como $\bar{x} = r\bar{x}$, segue que $\bar{x} = 0$.
- Determine a ordem de convergência. Como

$$\limsup \frac{x^{k+1}}{x^k} = s < 1,$$

temos que a convergência é linear com razão s.

Exemplo

Considere $0 < r < s < 1$ e a sequência (x^k) definida por $x^0 = 1$ e

$$x^{k+1} = \begin{cases} rx^k, & \text{se } k \text{ é par} \\ sx^k, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

- Mostre que a sequência é convergente. Note que $x^{k+1} < x^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $0 \le x^k \le x^0$. Sendo (x^k) decrescente e limitada, concluímos que é convergente, digamos $x^k \to \bar{x}$.
- Calcule seu ponto limite. Como $\bar{x} = r\bar{x}$, segue que $\bar{x} = 0$.
- Determine a ordem de convergência. Como

$$\limsup \frac{x^{k+1}}{x^k} = s < 1,$$

temos que a convergência é linear com razão s.

CENGAGE Learning

Exemplo

Considere $0 < r < s < 1$ e a sequência (x^k) definida por $x^0 = 1$ e

$$x^{k+1} = \begin{cases} rx^k, & \text{se } k \text{ é par} \\ sx^k, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

- Mostre que a sequência é convergente. Note que $x^{k+1} < x^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $0 \le x^k \le x^0$. Sendo (x^k) decrescente e limitada, concluímos que é convergente, digamos $x^k \to \bar{x}$.
- Calcule seu ponto limite. Como $\bar{x} = r\bar{x}$, segue que $\bar{x} = 0$.
- Determine a ordem de convergência. Como

$$\limsup \frac{x^{k+1}}{x^k} = s < 1,$$

temos que a convergência é linear com razão s.

Exemplo

Considere $0 < r < s < 1$ e a sequência (x^k) definida por $x^0 = 1$ e

$$x^{k+1} = \begin{cases} rx^k, & \text{se } k \text{ é par} \\ sx^k, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

- Mostre que a sequência é convergente. Note que $x^{k+1} < x^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $0 \leq x^k \leq x^0$. Sendo (x^k) decrescente e limitada, concluímos que é convergente, digamos $x^k \to \bar{x}$.
- Calcule seu ponto limite. Como $\bar{x} = r\bar{x}$, segue que $\bar{x} = 0$.
- Determine a ordem de convergência. Como

$$\limsup \frac{x^{k+1}}{x^k} = s < 1,$$

temos que a convergência é linear com razão s.

Exemplo

Considere $0 < r < s < 1$ e a sequência (x^k) definida por $x^0 = 1$ e

$$x^{k+1} = \begin{cases} rx^k, & \text{se } k \text{ é par} \\ sx^k, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

- Mostre que a sequência é convergente. Note que $x^{k+1} < x^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $0 \leq x^k \leq x^0$. Sendo (x^k) decrescente e limitada, concluímos que é convergente, digamos $x^k \to \bar{x}$.
- Calcule seu ponto limite. Como $\bar{x} = r\bar{x}$, segue que $\bar{x} = 0$.
- Determine a ordem de convergência. Como

$$\limsup \frac{x^{k+1}}{x^k} = s < 1,$$

temos que a convergência é linear com razão s.

Fronteira e fecho de um conjunto

Definição

- Um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é dito ponto de fronteira de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando qualquer vizinhança de $\bar{x}$ contém algum elemento de X e algum elemento do complementar de X.
- O conjunto dos pontos fronteira de X é chamado de fronteira de X e será denotado por $\mathrm{Fr}X$.
- O fecho de um conjunto X é a união de X com a fronteira de X e será denotado por $\overline{X}$.

Fronteira e fecho de um conjunto

Definição

- Um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é dito ponto de fronteira de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando qualquer vizinhança de $\bar{x}$ contém algum elemento de X e algum elemento do complementar de X.
- O conjunto dos pontos fronteira de X é chamado de fronteira de X e será denotado por $\mathrm{Fr}X$.
- O fecho de um conjunto X é a união de X com a fronteira de X e será denotado por $\overline{X}$.

Fronteira e fecho de um conjunto

Definição

- Um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é dito ponto de fronteira de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando qualquer vizinhança de $\bar{x}$ contém algum elemento de X e algum elemento do complementar de X.
- O conjunto dos pontos fronteira de X é chamado de fronteira de X e será denotado por $\mathrm{Fr}X$.
- O fecho de um conjunto X é a união de X com a fronteira de X e será denotado por $\overline{X}$.

Conjunto compacto

Definição

- $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado quando contém sua fronteira, ou seja, quando $\mathrm{Fr}X \subset X$.
- $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado quando existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$, para todo $x \in X$.
- $X \subset \mathbb{R}^n$ é compacto quando é fechado e limitado.

O conjunto X é compacto se, e somente se, toda sequência de elementos de X possui uma subsequência que converge para algum elemento de X.

CENGAGE Learning

Conjunto compacto

Definição

- $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado quando contém sua fronteira, ou seja, quando $\mathrm{Fr}X \subset X$.
- $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado quando existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$, para todo $x \in X$.
- $X \subset \mathbb{R}^n$ é compacto quando é fechado e limitado.

O conjunto X é compacto se, e somente se, toda sequência de elementos de X possui uma subsequência que converge para algum elemento de X.

Conjunto compacto

Definição

- $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado quando contém sua fronteira, ou seja, quando $\mathrm{Fr}X \subset X$.
- $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado quando existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$, para todo $x \in X$.
- $X \subset \mathbb{R}^n$ é compacto quando é fechado e limitado.

O conjunto X é compacto se, e somente se, toda sequência de elementos de X possui uma subsequência que converge para algum elemento de X.

Exemplo

Determine a fronteira e verifique se o conjunto é compacto:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16 \right\}.$$

- Fronteira.

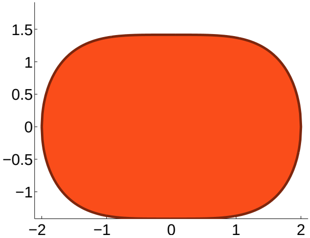
$$\mathrm{Fr}\,X = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 = 16 \right\}.$$

- X é limitado, pois se $x \in X$, então $-2 \leq x_1 \leq 2$ e $-\sqrt{2} \leq x_2 \leq \sqrt{2}$.
- X é fechado. De fato, se $x^k \in X$ e $x^k \to x$, então

$$x_1^k \to x_1 \quad , \quad x_2^k \to x_2 \quad \text{e} \quad (x_1^k)^4 + 8(x_2^k)^2 \leq 16.$$

Portanto, $x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16$, donde segue que X é fechado.

- X é compacto.



Exemplo

Determine a fronteira e verifique se o conjunto é compacto:

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16\right\}.$$

- Fronteira.

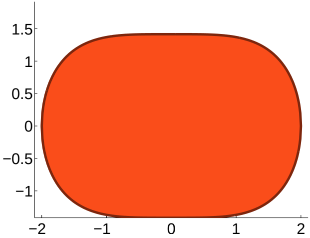
$$\mathrm{Fr}\,X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 = 16\right\}.$$

- X é limitado, pois se $x \in X$, então $-2 \leq x_1 \leq 2$ e $-\sqrt{2} \leq x_2 \leq \sqrt{2}$.
- X é fechado. De fato, se $x^k \in X$ e $x^k \to x$, então

$$x_1^k \to x_1 \quad , \quad x_2^k \to x_2 \quad \text{e} \quad (x_1^k)^4 + 8(x_2^k)^2 \leq 16.$$

Portanto, $x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16$, donde segue que X é fechado.

- X é compacto.



Exemplo

Determine a fronteira e verifique se o conjunto é compacto:

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16\right\}.$$

- Fronteira.

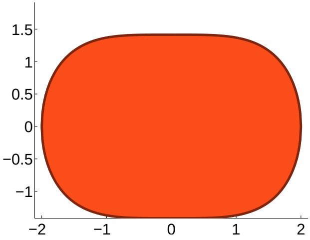
$$\mathrm{Fr}X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 = 16\right\}.$$

- X é limitado, pois se $x \in X$, então $-2 \leq x_1 \leq 2$ e $-\sqrt{2} \leq x_2 \leq \sqrt{2}$.
- X é fechado. De fato, se $x^k \in X$ e $x^k \to x$, então

$$x_1^k \to x_1 \quad , \quad x_2^k \to x_2 \quad \text{e} \quad (x_1^k)^4 + 8(x_2^k)^2 \leq 16.$$

Portanto, $x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16$, donde segue que X é fechado.

- X é compacto.



Exemplo

Determine a fronteira e verifique se o conjunto é compacto:

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16\right\}.$$

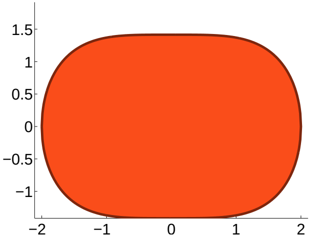
- Fronteira.

$$\mathrm{Fr}X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 = 16\right\}.$$

- X é limitado, pois se $x \in X$, então $-2 \leq x_1 \leq 2$ e $-\sqrt{2} \leq x_2 \leq \sqrt{2}$.
- X é fechado. De fato, se $x^k \in X$ e $x^k \to x$, então

$$x_1^k \to x_1 \quad , \quad x_2^k \to x_2 \quad \text{e} \quad (x_1^k)^4 + 8(x_2^k)^2 \leq 16.$$

Portanto, $x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16$, donde segue que X é fechado.



- X é compacto.

Exemplo

Determine a fronteira e verifique se o conjunto é compacto:

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16\right\}.$$

- Fronteira.

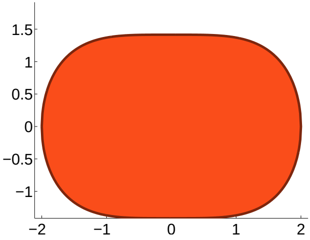
$$\operatorname{Fr} X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 = 16\right\}.$$

- X é limitado, pois se $x \in X$, então $-2 \leq x_1 \leq 2$ e $-\sqrt{2} \leq x_2 \leq \sqrt{2}$.
- X é fechado. De fato, se $x^k \in X$ e $x^k \to x$, então

$$x_1^k \to x_1 \quad , \quad x_2^k \to x_2 \quad \text{e} \quad (x_1^k)^4 + 8(x_2^k)^2 \leq 16.$$

Portanto, $x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16$, donde segue que X é fechado.

- X é compacto.



Exemplo

Determine a fronteira dos conjuntos abaixo e verifique se são compactos:

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \qquad \text{e} \qquad S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

- Fronteira.

$$\mathrm{Fr}\, B = \mathrm{Fr}\, S = S.$$

- Compacidade. O conjunto B não é compacto pois não contém sua fronteira mas S é compacto.

Exemplo

Determine a fronteira dos conjuntos abaixo e verifique se são compactos:

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \qquad \text{e} \qquad S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

- Fronteira.

$$\operatorname{Fr} B = \operatorname{Fr} S = S.$$

- Compacidade. O conjunto B não é compacto pois não contém sua fronteira mas S é compacto.

Determine a fronteira dos conjuntos abaixo e verifique se são compactos:

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \qquad \text{e} \qquad S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

- Fronteira.

$$\mathrm{Fr}\, B = \mathrm{Fr}\, S = S.$$

- Compacidade. O conjunto B não é compacto pois não contém sua fronteira mas S é compacto.

Exemplo

Determine a fronteira dos conjuntos abaixo e verifique se são compactos:

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \qquad \text{e} \qquad S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

- Fronteira.

$$\mathrm{Fr}\, B = \mathrm{Fr}\, S = S.$$

- Compacidade. O conjunto B não é compacto pois não contém sua fronteira mas S é compacto.

Exemplo

Determine a fronteira dos conjuntos abaixo e verifique se são compactos:

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \qquad \text{e} \qquad S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

- Fronteira.

$$\mathrm{Fr}\, B = \mathrm{Fr}\, S = S.$$

- Compacidade. O conjunto B não é compacto pois não contém sua fronteira mas S é compacto.

Exemplo

Determine a fronteira do conjunto abaixo e verifique se é compacto:

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x \leq b \right\},$$

onde $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$ são dados.

- Fronteira.

$$\operatorname{Fr} \Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x = b \right\}.$$

- Compacidade. Ω não é compacto, pois não é limitado.
  Tomando um elemento $x \in \Omega$ e um vetor $v \perp u$, temos $x + tv \in \Omega$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Determine a fronteira do conjunto abaixo e verifique se é compacto:

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x \leq b\right\},$$

onde $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$ são dados.

- Fronteira.

$$\mathrm{Fr}\,\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x = b\right\}.$$

- Compacidade. Ω não é compacto, pois não é limitado.
  Tomando um elemento $x \in \Omega$ e um vetor $v \perp u$, temos $x + tv \in \Omega$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Determine a fronteira do conjunto abaixo e verifique se é compacto:

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x \leq b \right\},$$

onde $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$ são dados.

- Fronteira.

$$\mathrm{Fr}\,\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x = b \right\}.$$

- Compacidade. Ω não é compacto, pois não é limitado.
  Tomando um elemento $x \in \Omega$ e um vetor $v \perp u$, temos $x + tv \in \Omega$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Conjunto aberto

Definição

- Um ponto $\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ é ponto interior de X quando é centro de alguma bola aberta contida em X, ou seja, quando existe $\delta > 0$ tal que $B(\bar{x}, \delta) \subset X$.
- O interior de um conjunto X é formado pelos pontos interiores a X e denotado por $\text{int}X$.
- $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto quando todos os seus pontos são interiores, ou seja, $\text{int}X = X$.

Conjunto aberto

Definição

- Um ponto $\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ é ponto interior de X quando é centro de alguma bola aberta contida em X, ou seja, quando existe $\delta > 0$ tal que $B(\bar{x}, \delta) \subset X$.
- O interior de um conjunto X é formado pelos pontos interiores a X e denotado por $\text{int}X$.
- $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto quando todos os seus pontos são interiores, ou seja, $\text{int}X = X$.

Conjunto aberto

Definição

- Um ponto $\bar{x} \in X \subset \mathbb{R}^n$ é ponto interior de X quando é centro de alguma bola aberta contida em X, ou seja, quando existe $\delta > 0$ tal que $B(\bar{x}, \delta) \subset X$.
- O interior de um conjunto X é formado pelos pontos interiores a X e denotado por $\mathrm{int}X$.
- $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto quando todos os seus pontos são interiores, ou seja, $\mathrm{int}X = X$.

Exemplo

Determine o interior dos conjuntos abaixo e verifique se são abertos.

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16\right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}, \quad \Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x \leq b\right\}.$$

- $\text{int}X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 < 16\right\}$.
- $\text{int}B = B$.
- $\text{int}S = \emptyset$.
- $\text{int}\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x < b\right\}$.

Assim, apenas o conjunto B é aberto.

Exemplo

Determine o interior dos conjuntos abaixo e verifique se são abertos.

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16 \right\}, \quad B = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \},$$
$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \}, \quad \Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x \leq b \right\}.$$

- $\text{int}X = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 < 16 \right\}.$
- $\text{int}B = B.$
- $\text{int}S = \emptyset.$
- $\text{int}\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x < b \right\}.$

Assim, apenas o conjunto B é aberto.

Exemplo

Determine o interior dos conjuntos abaixo e verifique se são abertos.

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16\right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}, \qquad \Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x \leq b\right\}.$$

- $\text{int}X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 < 16\right\}$.
- $\text{int}B = B$.
- $\text{int}S = \emptyset$.
- $\text{int}\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x < b\right\}$.

Assim, apenas o conjunto B é aberto.

Exemplo

Determine o interior dos conjuntos abaixo e verifique se são abertos.

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16\right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}, \quad \Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x \leq b\right\}.$$

- $\text{int}X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 < 16\right\}$.
- $\text{int}B = B$.
- $\text{int}S = \emptyset$.
- $\text{int}\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x < b\right\}$.

Assim, apenas o conjunto B é aberto.

Exemplo

Determine o interior dos conjuntos abaixo e verifique se são abertos.

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16\right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}, \qquad \Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x \leq b\right\}.$$

- $\mathrm{int}X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 < 16\right\}$.
- $\mathrm{int}B = B$.
- $\mathrm{int}S = \emptyset$.
- $\mathrm{int}\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x < b\right\}$.

Assim, apenas o conjunto B é aberto.

CENGAGE Learning

Exemplo

Determine o interior dos conjuntos abaixo e verifique se são abertos.

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 \leq 16\right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}, \quad \Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x \leq b\right\}.$$

- $\text{int}X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^4 + 8x_2^2 < 16\right\}$.
- $\text{int}B = B$.
- $\text{int}S = \emptyset$.
- $\text{int}\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid u^T x < b\right\}$.

Assim, apenas o conjunto B é aberto.

Ínfimo e supremo de um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Considere $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente.

Definição

- Existe um único $c \in \mathbb{R}$ tal que
  - (i) $c \leq x$, para todo $x \in X$;
  - (ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < c + \varepsilon$.

  Dizemos que c é o ínfimo do conjunto X e denotamos $c = \inf X$.
- Existe um único $s \in \mathbb{R}$ tal que
  - (i) $x \leq s$, para todo $x \in X$;
  - (ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x > s - \varepsilon$.

  Dizemos que s é o supremo do conjunto X e denotamos $s = \sup X$.

Considere $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente.

Definição

- Existe um único $c \in \mathbb{R}$ tal que
  - (i) $c \leq x$, para todo $x \in X$;
  - (ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < c + \varepsilon$.

  Dizemos que c é o ínfimo do conjunto X e denotamos $c = \inf X$.
- Existe um único $s \in \mathbb{R}$ tal que
  - (i) $x \leq s$, para todo $x \in X$;
  - (ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x > s - \varepsilon$.

  Dizemos que s é o supremo do conjunto X e denotamos $s = \sup X$.

Núcleo e Imagem.

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Definição

- Núcleo de A: $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$
- Nulidade de A: $\dim(\mathcal{N}(A))$
- Imagem de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:
  $\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax, \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^n\}$.
- Posto de A: $\mathrm{posto}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$.

Núcleo e Imagem.

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Definição

- Núcleo de A: $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$
- Nulidade de A: $\dim(\mathcal{N}(A))$
- Imagem de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:
  $\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax,$ para algum $x \in \mathbb{R}^n\}$.
- Posto de A: $\mathrm{posto}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$.

Núcleo e Imagem.

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Definição

- Núcleo de A: $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$
- Nulidade de A: $\dim(\mathcal{N}(A))$
- Imagem de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:
  $\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax,$ para algum $x \in \mathbb{R}^n\}$.
- Posto de A: $\mathrm{posto}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$.

Núcleo e Imagem.

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Definição

- Núcleo de A: $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$
- Nulidade de A: $\dim(\mathcal{N}(A))$
- Imagem de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:
  $\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax,$ para algum $x \in \mathbb{R}^n\}$.
- Posto de A: $\mathrm{posto}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$.

Núcleo e Imagem.

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Resultados

- $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{N}(A^T A) = \mathcal{N}(A)$.
- $\mathrm{Im}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.
- $\mathrm{Im}(A)$ é o espaço vetorial gerado pelas colunas de A, chamado espaço coluna de A.
- $\mathrm{posto}(A) = \mathrm{posto}(A^T)$.
- $\mathrm{posto}(A) \leq \min\{m, n\}$.

A é de posto cheio ou posto completo quando $\mathrm{posto}(A) = \min\{m, n\}$.

Se A é de posto completo, então ou as colunas ou as linhas de A são linearmente independentes.

Núcleo e Imagem.

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Resultados

- $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{N}(A^T A) = \mathcal{N}(A)$.
- $\mathrm{Im}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.
- $\mathrm{Im}(A)$ é o espaço vetorial gerado pelas colunas de A, chamado espaço coluna de A.
- $\mathrm{posto}(A) = \mathrm{posto}(A^T)$.
- $\mathrm{posto}(A) \leq \min\{m, n\}$.

A é de posto cheio ou posto completo quando $\mathrm{posto}(A) = \min\{m, n\}$.

Se A é de posto completo, então ou as colunas ou as linhas de A são linearmente independentes.

Núcleo e Imagem.

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Resultados

- $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{N}(A^TA) = \mathcal{N}(A)$.
- $\mathrm{Im}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.
- $\mathrm{Im}(A)$ é o espaço vetorial gerado pelas colunas de A, chamado espaço coluna de A.
- $\mathrm{posto}(A) = \mathrm{posto}(A^T)$.
- $\mathrm{posto}(A) \leq \min\{m,n\}$.

A é de posto cheio ou posto completo quando $\mathrm{posto}(A) = \min\{m,n\}$.

Se A é de posto completo, então ou as colunas ou as linhas de A são linearmente independentes.

Núcleo e Imagem.

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Resultados

- $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{N}(A^T A) = \mathcal{N}(A)$.
- $\mathrm{Im}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.
- $\mathrm{Im}(A)$ é o espaço vetorial gerado pelas colunas de A, chamado espaço coluna de A.
- $\mathrm{posto}(A) = \mathrm{posto}(A^T)$.
- $\mathrm{posto}(A) \leq \min\{m, n\}$.

A é de posto cheio ou posto completo quando $\mathrm{posto}(A) = \min\{m, n\}$.

Se A é de posto completo, então ou as colunas ou as linhas de A são linearmente independentes.

Núcleo e Imagem.

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Resultados

- $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{N}(A^T A) = \mathcal{N}(A)$.
- $\mathrm{Im}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.
- $\mathrm{Im}(A)$ é o espaço vetorial gerado pelas colunas de A, chamado espaço coluna de A.
- $\mathrm{posto}(A) = \mathrm{posto}(A^T)$.
- $\mathrm{posto}(A) \leq \min\{m, n\}$.

A é de posto cheio ou posto completo quando $\mathrm{posto}(A) = \min\{m, n\}$.

Se A é de posto completo, então ou as colunas ou as linhas de A são linearmente independentes.

Núcleo e Imagem.

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Resultados

- $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{N}(A^TA) = \mathcal{N}(A)$.
- $\mathrm{Im}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.
- $\mathrm{Im}(A)$ é o espaço vetorial gerado pelas colunas de A, chamado espaço coluna de A.
- $\mathrm{posto}(A) = \mathrm{posto}(A^T)$.
- $\mathrm{posto}(A) \leq \min\{m,n\}$.

A é de posto cheio ou posto completo quando $\mathrm{posto}(A) = \min\{m,n\}$.
Se A é de posto completo, então ou as colunas ou as linhas de A são linearmente independentes.

Resultado fundamental

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Teorema do núcleo e imagem

$$\dim(\mathcal{N}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = n$$

$\mathcal{N}(A) \perp \mathrm{Im}(A^T)$

Exemplo

Dada a matriz $A = (1\ 1\ 0)$, determine $\mathcal{N}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$.
Qual é a representação geométrica destes subespaços?

- Como $x \in \mathcal{N}(A)$ se, e somente se, $x_1 + x_2 = 0$,

$$\mathcal{N}(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

que geometricamente é um plano π.

- $\mathrm{Im}(A^T) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ que é uma reta perpendicular ao plano π.

Exemplo

Dada a matriz $A = (1\ 1\ 0)$, determine $\mathcal{N}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$.
Qual é a representação geométrica destes subespaços?

- Como $x \in \mathcal{N}(A)$ se, e somente se, $x_1 + x_2 = 0$,

$$\mathcal{N}(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

que geometricamente é um plano π.

- $\mathrm{Im}(A^T) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ que é uma reta perpendicular ao plano π.

$\mathcal{N}(A) \perp \mathrm{Im}(A^T)$

Exemplo

Dada a matriz $A = (1\ 1\ 0)$, determine $\mathcal{N}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$.
Qual é a representação geométrica destes subespaços?

- Como $x \in \mathcal{N}(A)$ se, e somente se, $x_1 + x_2 = 0$,

$$\mathcal{N}(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

  que geometricamente é um plano π.

- $\mathrm{Im}(A^T) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ que é uma reta perpendicular ao plano π.

$\mathcal{N}(A) \perp \mathrm{Im}(A^T)$

Generalização

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que $\mathcal{N}(A) \perp \mathrm{Im}(A^T)$.

Dados $x \in \mathcal{N}(A)$ e $z \in \mathrm{Im}(A^T)$, temos

$$x^T z = x^T A^T y = (Ax)^T y = 0.$$

Generalização

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mostre que $\mathcal{N}(A) \perp \mathrm{Im}(A^T)$.

Dados $x \in \mathcal{N}(A)$ e $z \in \mathrm{Im}(A^T)$, temos

$$x^T z = x^T A^T y = (Ax)^T y = 0.$$

Complemento ortogonal

Definição

Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$. O complemento ortogonal de Y é o conjunto dado por

$$Y^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T y = 0 \quad \text{para todo} \quad y \in Y\}.$$

Lema

Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então $\mathcal{N}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.

Complemento ortogonal

Definição

Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$. O complemento ortogonal de Y é o conjunto dado por

$$Y^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T y = 0 \quad \text{para todo} \quad y \in Y\}.$$

Lema

Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então $\mathcal{N}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.

Matriz definida positiva

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

- A é definida positiva quando $x^T A x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e denota-se por $A > 0$.
- A é dita semidefinida positiva, quando $x^T A x \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e denota-se por $A \geq 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes

- A é definida positiva.
- $x^T A x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Todos os autovalores de A são positivos.
- Os determinantes de A e das suas submatrizes obtidas retirando-se as últimas k linhas e colunas de A com $k = 1, \cdots, n-1$ são positivos.

Matriz definida positiva

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

- A é **definida positiva** quando $x^T Ax > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e denota-se por $A > 0$.
- A é dita **semidefinida positiva**, quando $x^T Ax \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e denota-se por $A \geq 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes

- A é definida positiva.
- $x^T Ax > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Todos os autovalores de A são positivos.
- Os determinantes de A e das suas submatrizes obtidas retirando-se as últimas k linhas e colunas de A com $k = 1, \cdots, n-1$ são positivos.

Matriz definida positiva

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

- A é **definida positiva** quando $x^T Ax > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e denota-se por $A > 0$.
- A é dita **semidefinida positiva**, quando $x^T Ax \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e denota-se por $A \geq 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes

- A é definida positiva.
- $x^T Ax > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Todos os autovalores de A são positivos.
- Os determinantes de A e das suas submatrizes obtidas retirando-se as últimas k linhas e colunas de A com $k = 1, \cdots, n-1$ são positivos.

Matriz definida positiva

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

- A é definida positiva quando $x^T Ax > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e denota-se por $A > 0$.
- A é dita semidefinida positiva, quando $x^T Ax \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e denota-se por $A \geq 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes

- A é definida positiva.
- $x^T Ax > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Todos os autovalores de A são positivos.
- Os determinantes de A e das suas submatrizes obtidas retirando-se as últimas k linhas e colunas de A com $k = 1, \cdots, n-1$ são positivos.

Matriz definida positiva

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

- A é definida positiva quando $x^T Ax > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e denota-se por $A > 0$.
- A é dita semidefinida positiva, quando $x^T Ax \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e denota-se por $A \geq 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes

- A é definida positiva.
- $x^T Ax > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Todos os autovalores de A são positivos.
- Os determinantes de A e das suas submatrizes obtidas retirando-se as últimas k linhas e colunas de A com $k = 1, \cdots, n-1$ são positivos.

Matriz definida positiva

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

- A é definida positiva quando $x^T Ax > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e denota-se por $A > 0$.
- A é dita semidefinida positiva, quando $x^T Ax \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e denota-se por $A \geq 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes

- A é definida positiva.
- $x^T Ax > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Todos os autovalores de A são positivos.
- Os determinantes de A e das suas submatrizes obtidas retirando-se as últimas k linhas e colunas de A com $k = 1, \cdots, n-1$ são positivos.

Matriz definida positiva

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

- A é definida positiva quando $x^T A x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e denota-se por $A > 0$.
- A é dita semidefinida positiva, quando $x^T A x \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e denota-se por $A \geq 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes

- A é definida positiva.
- $x^T A x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Todos os autovalores de A são positivos.
- Os determinantes de A e das suas submatrizes obtidas retirando-se as últimas k linhas e colunas de A com $k = 1, \cdots, n-1$ são positivos.

Matriz definida negativa

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

- A é definida negativa quando $x^T Ax < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e denota-se por $A < 0$.
- A é dita semidefinida negativa, quando $x^T Ax \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$e denota-se por $A \leq 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes

- A é definida negativa.
- $x^T Ax < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Todos os autovalores de A são negativos.
- Os determinantes de A e das suas submatrizes obtidas retirando-se as últimas k linhas e colunas de A com $k = 1, \cdots, n-1$, de ordem par são positivos, enquanto os de ordem ímpar são negativos.

Matriz definida negativa

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

- A é definida negativa quando $x^T Ax < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e denota-se por $A < 0$.
- A é dita semidefinida negativa, quando $x^T Ax \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$e denota-se por $A \leq 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes

- A é definida negativa.
- $x^T Ax < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Todos os autovalores de A são negativos.
- Os determinantes de A e das suas submatrizes obtidas retirando-se as últimas k linhas e colunas de A com $k = 1, \cdots, n-1$, de ordem par são positivos, enquanto os de ordem ímpar são negativos.

Matriz definida negativa

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

- A é definida negativa quando $x^T A x < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e denota-se por $A < 0$.
- A é dita semidefinida negativa, quando $x^T A x \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$e denota-se por $A \leq 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes

- A é definida negativa.
- $x^T A x < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Todos os autovalores de A são negativos.
- Os determinantes de A e das suas submatrizes obtidas retirando-se as últimas k linhas e colunas de A com $k = 1, \cdots, n-1$, de ordem par são positivos, enquanto os de ordem ímpar são negativos.

Matriz definida negativa

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

- A é definida negativa quando $x^T Ax < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e denota-se por $A < 0$.
- A é dita semidefinida negativa, quando $x^T Ax \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$e denota-se por $A \leq 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes

- A é definida negativa.
- $x^T Ax < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Todos os autovalores de A são negativos.
- Os determinantes de A e das suas submatrizes obtidas retirando-se as últimas k linhas e colunas de A com $k = 1, \cdots, n-1$, de ordem par são positivos, enquanto os de ordem ímpar são negativos.

Matriz definida negativa

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

- A é definida negativa quando $x^T A x < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e denota-se por $A < 0$.
- A é dita semidefinida negativa, quando $x^T A x \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$e denota-se por $A \leq 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes

- A é definida negativa.
- $x^T A x < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Todos os autovalores de A são negativos.
- Os determinantes de A e das suas submatrizes obtidas retirando-se as últimas k linhas e colunas de A com $k = 1, \cdots, n-1$, de ordem par são positivos, enquanto os de ordem ímpar são negativos.

Matriz definida negativa

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

- A é definida negativa quando $x^T Ax < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e denota-se por $A < 0$.
- A é dita semidefinida negativa, quando $x^T Ax \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$e denota-se por $A \leq 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes

- A é definida negativa.
- $x^T Ax < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Todos os autovalores de A são negativos.
- Os determinantes de A e das suas submatrizes obtidas retirando-se as últimas k linhas e colunas de A com $k = 1, \cdots, n-1$, de ordem par são positivos, enquanto os de ordem ímpar são negativos.

Matriz definida negativa

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

- A é definida negativa quando $x^T Ax < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e denota-se por $A < 0$.
- A é dita semidefinida negativa, quando $x^T Ax \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$e denota-se por $A \leq 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes

- A é definida negativa.
- $x^T Ax < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Todos os autovalores de A são negativos.
- Os determinantes de A e das suas submatrizes obtidas retirando-se as últimas k linhas e colunas de A com $k = 1, \cdots, n-1$, de ordem par são positivos, enquanto os de ordem ímpar são negativos.

Matriz indefinida

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica.

Definição

A é indefinida quando existem $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $x^T Ax < 0 < y^T Ay$.

Uma matriz indefinida possui alguns autovalores positivos e outros negativos.

Propriedades

Resultado

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica com λ_1 e λ_n sendo o menor e o maior autovalor, respectivamente, então

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq x^T A x \leq \lambda_n \|x\|^2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Norma de uma matriz

Definição de norma de matriz

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$$

- Generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz: $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$
- Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Se considerarmos a norma euclidiana na definição da norma, então

$$\|A\| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}.$$

Norma de uma matriz

Definição de norma de matriz

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$$

- Generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz: $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$
- Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Se considerarmos a norma euclidiana na definição da norma, então

$$\|A\| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}.$$

CENGAGE Learning

Definição de norma de matriz

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$$

- Generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz: $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$
- Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Se considerarmos a norma euclidiana na definição da norma, então

$$\|A\| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}.$$

Gradiente, Hessiana e Jacobiana

- Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$.
  - Gradiente de f:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

  - Hessiana de f:

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Sua derivada, chamada de Jacobiana, é a matriz

$$J_f = f' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Gradiente, Hessiana e Jacobiana

- Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$.
  - Gradiente de f:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

  - Hessiana de f:

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Sua derivada, chamada de Jacobiana, é a matriz

$$J_f = f' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Exemplo

Calcule gradiente e Hessiana das funções abaixo.

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|^2 = x^T x$.

$$\nabla f(x) = 2x \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 f(x) = 2I,$$

onde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz identidade.

- $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^T A x$, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz arbitrária. Note que

$$\frac{g(x + te_i) - g(x)}{t} = e_i^T (A + A^T) x + t e_i^T A e_i.$$

Portanto,

$$\nabla g(x) = (A + A^T) x \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 g(x) = A + A^T.$$

Exemplo

Calcule gradiente e Hessiana das funções abaixo.

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|^2 = x^T x$.

$$\nabla f(x) = 2x \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 f(x) = 2I,$$

onde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz identidade.

- $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^T A x$, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz arbitrária. Note que

$$\frac{g(x + te_i) - g(x)}{t} = e_i^T (A + A^T)x + te_i^T A e_i.$$

Portanto,

$$\nabla g(x) = (A + A^T)x \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 g(x) = A + A^T.$$

CENGAGE Learning

Calcule gradiente e Hessiana das funções abaixo.

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|^2 = x^T x$.

$$\nabla f(x) = 2x \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 f(x) = 2I,$$

 onde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz identidade.

- $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^T A x$, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz arbitrária. Note que

$$\frac{g(x+te_i) - g(x)}{t} = e_i^T (A + A^T) x + t e_i^T A e_i.$$

 Portanto,

$$\nabla g(x) = (A + A^T) x \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 g(x) = A + A^T.$$

Exemplo

Calcule gradiente e Hessiana das funções abaixo.

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|^2 = x^T x$.

$$\nabla f(x) = 2x \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 f(x) = 2I,$$

  onde $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a matriz identidade.

- $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^T A x$, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz arbitrária. Note que

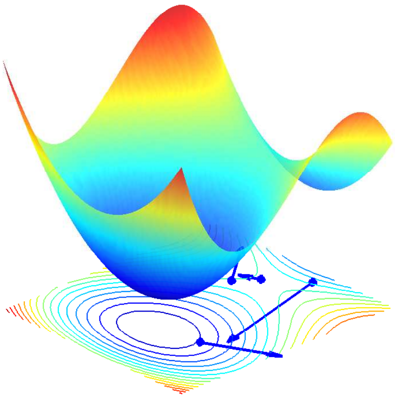
$$\frac{g(x+te_i) - g(x)}{t} = e_i^T(A + A^T)x + te_i^T A e_i.$$

  Portanto,

$$\nabla g(x) = (A + A^T)x \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 g(x) = A + A^T.$$

Propriedade do vetor gradiente

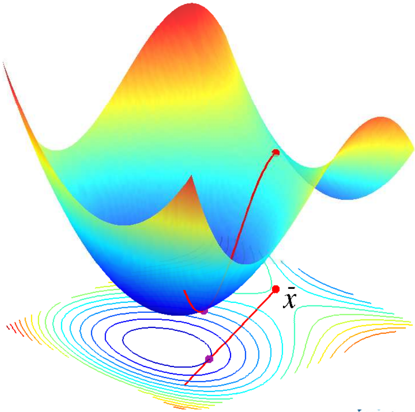
O gradiente é um vetor perpendicular à curva de nível e aponta na direção de maior crescimento da função.



Restrição de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aos pontos de um segmento

Dados $\bar{x}, d \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, defina $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = f(\bar{x} + td)$.

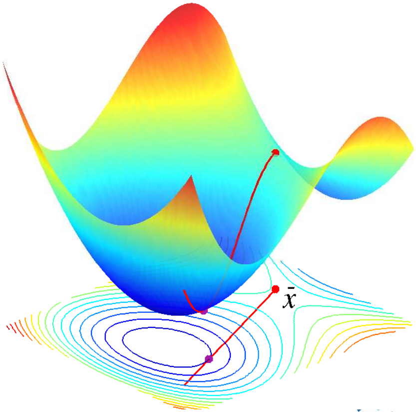
- Derivada de φ:
  $\varphi'(t) = \nabla f(\bar{x} + td)^T d.$
- Segunda derivada de φ:
  $\varphi''(t) = d^T \nabla^2 f(\bar{x} + td) d.$



Restrição de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aos pontos de um segmento

Dados $\bar{x}, d \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, defina $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = f(\bar{x} + td)$.

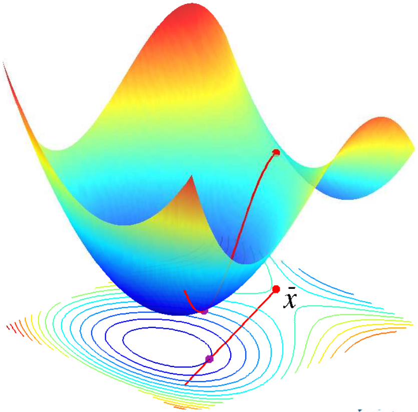
- Derivada de φ:
  $\varphi'(t) = \nabla f(\bar{x} + td)^T d.$
- Segunda derivada de φ:
  $\varphi''(t) = d^T \nabla^2 f(\bar{x} + td) d.$



Restrição de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aos pontos de um segmento

Dados $\bar{x}, d \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, defina $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = f(\bar{x} + td)$.

- Derivada de φ:
  $\varphi'(t) = \nabla f(\bar{x} + td)^T d.$
- Segunda derivada de φ:
  $\varphi''(t) = d^T \nabla^2 f(\bar{x} + td) d.$

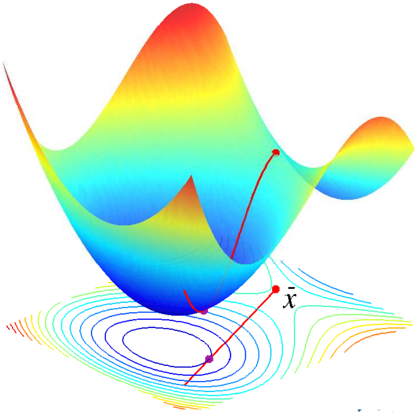


CENGAGE Learning

Restrição de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aos pontos de um segmento

Dados $\bar{x}, d \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, defina $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = f(\bar{x} + td)$.

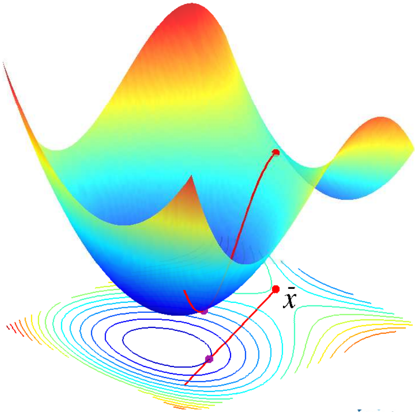
- Derivada de φ:
  $\varphi'(t) = \nabla f(\bar{x} + td)^T d.$
- Segunda derivada de φ:
  $\varphi''(t) = d^T \nabla^2 f(\bar{x} + td) d.$



NGAGE Learning

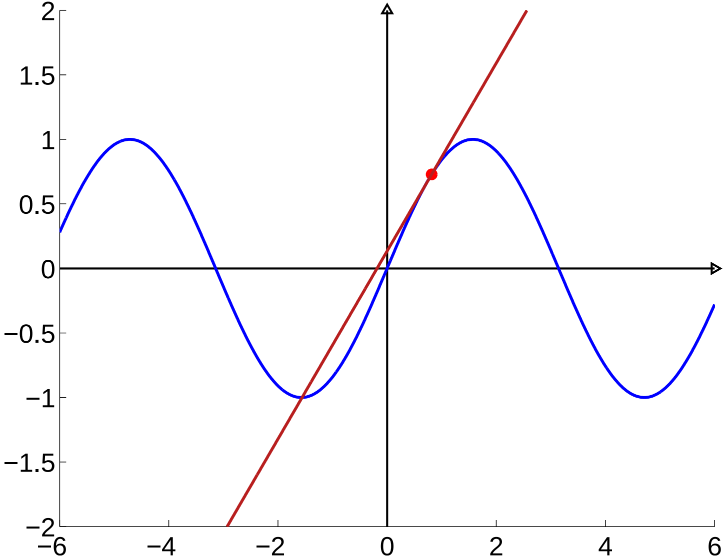
Dados $\bar{x}, d \in \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, defina $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = f(\bar{x} + td)$.

- Derivada de φ:
  $\varphi'(t) = \nabla f(\bar{x} + td)^T d.$
- Segunda derivada de φ:
  $\varphi''(t) = d^T \nabla^2 f(\bar{x} + td) d.$



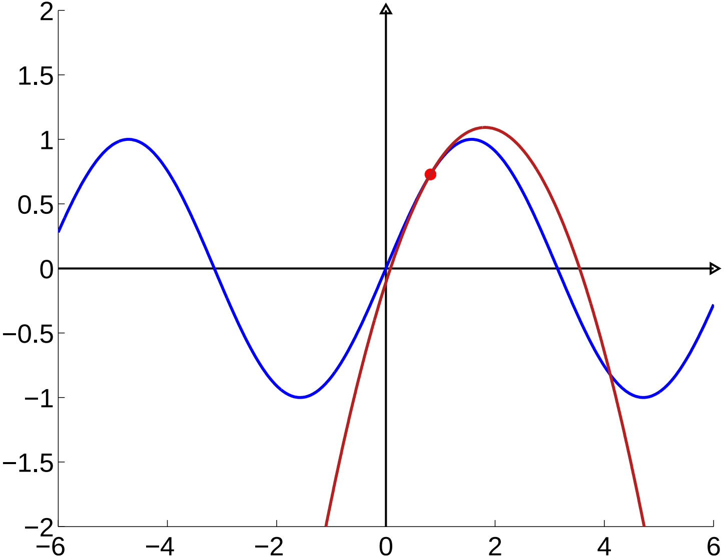
CENGAGE Learning

Aproximação de Taylor de ordem 1.

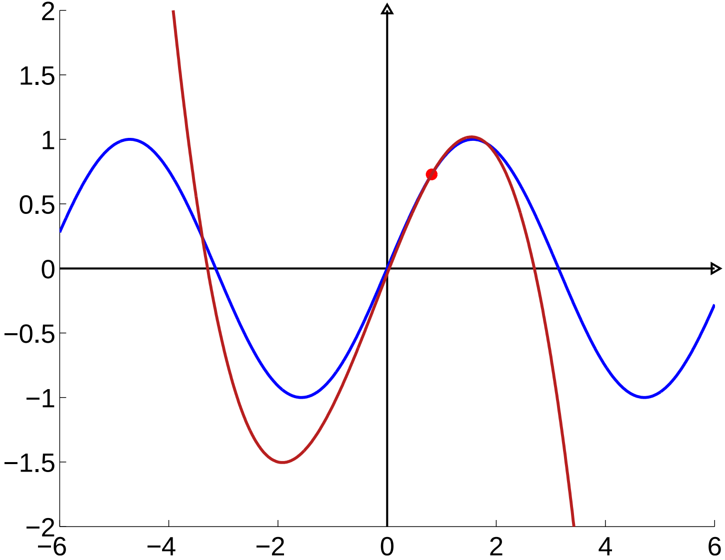


CENGAGE Learning

Aproximação de Taylor de ordem 2.

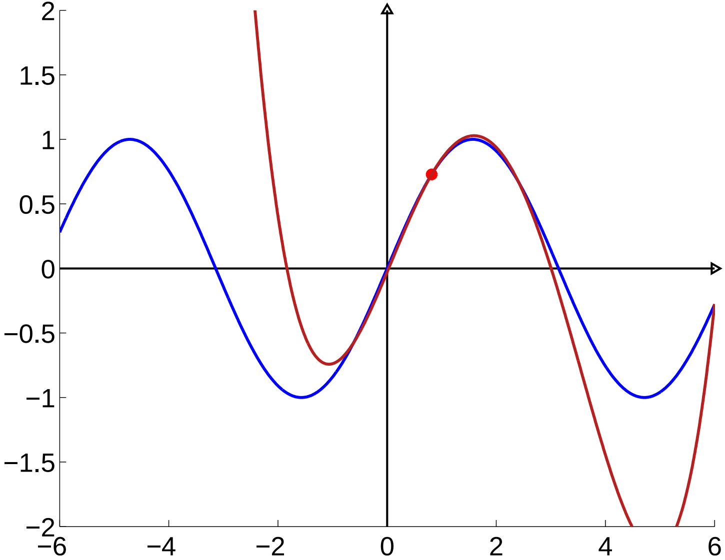


Aproximação de Taylor de ordem 3.



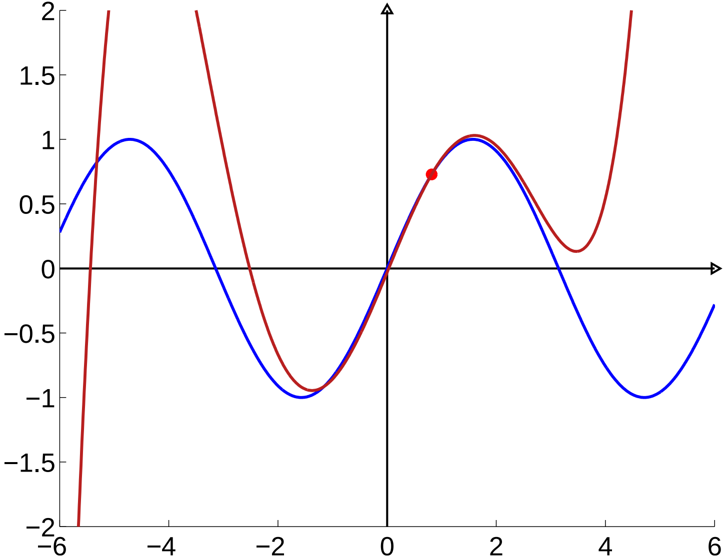
CENGAGE Learning

Aproximação de Taylor de ordem 4.



CENGAGE Learning

Aproximação de Taylor de ordem 5.



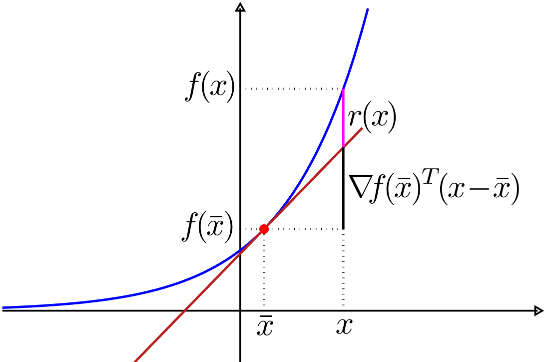
CENGAGE Learning

Taylor de primeira ordem

Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Então,

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + r(x),$$

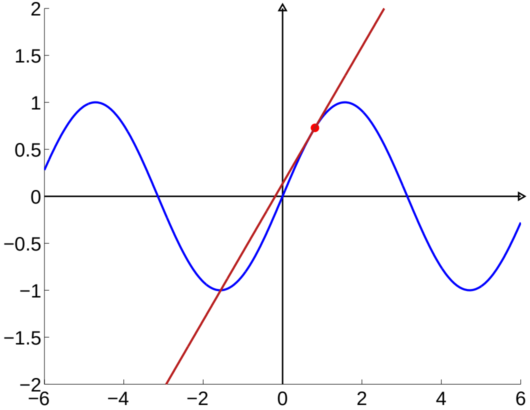
com $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \dfrac{r(x)}{\|x - \bar{x}\|} = 0$



Aproximação linear para f em torno de $\bar{x}$

Polinômio de Taylor de primeira ordem

$$p_1(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}).$$



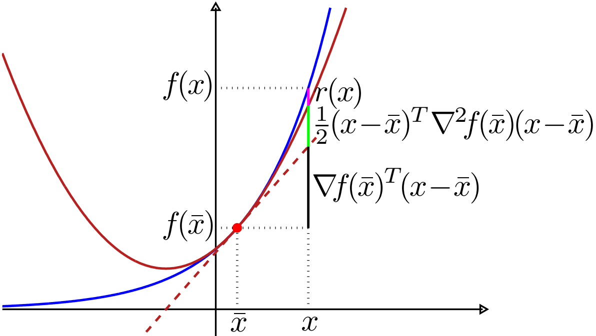
$$p_1(\bar{x}) = f(\bar{x})$$
$$\nabla p_1(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}).$$

Taylor de segunda ordem

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciável e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, então

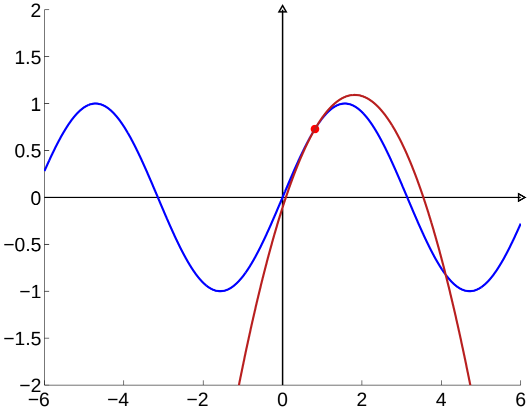
$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T \nabla^2 f(\bar{x})(x - \bar{x}) + r(x),$$

com $\displaystyle\lim_{x \to \bar{x}} \frac{r(x)}{\|x - \bar{x}\|^2} = 0$.



Polinômio de Taylor de segunda ordem

$$p_2(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T \nabla^2 f(\bar{x})(x - \bar{x})$$



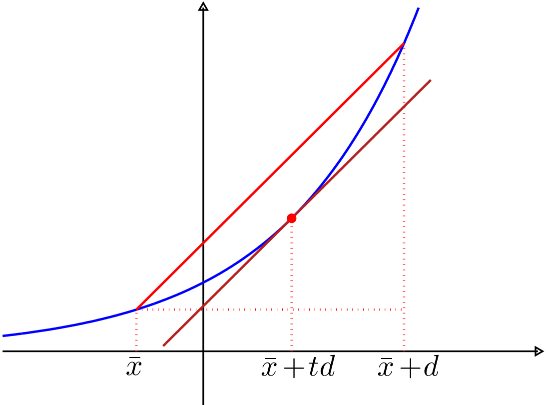
$$p_2(\bar{x}) = f(\bar{x})$$
$$\nabla p_2(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})$$
$$\nabla^2 p_2(\bar{x}) = \nabla^2 f(\bar{x})$$

CENGAGE Learning

Teorema do Valor Médio

Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua e $\bar{x}, d \in \mathbb{R}^n$. Se f é diferenciável no segmento $(\bar{x}, \bar{x}+d)$, então existe $t \in (0,1)$ tal que

$$f(\bar{x}+d) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}+td)^T d.$$



CENGAGE Learning

Taylor com resto de Lagrange

Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $\bar{x}, d \in \mathbb{R}^n$. Se f é duas vezes diferenciável no segmento $(\bar{x}, \bar{x}+d)$, então existe $t \in (0,1)$ tal que

$$f(\bar{x}+d) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(\bar{x}+td)d.$$

Desigualdade do Valor Médio

Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínua e $\bar{x}, d \in \mathbb{R}^n$. Se f é diferenciável no segmento $(\bar{x}, \bar{x}+d)$ e $\|J_f(x)\| \leq M$, para todo $x \in (\bar{x}, \bar{x}+d)$, então

$$\|f(\bar{x}+d) - f(\bar{x})\| \leq M\|d\|.$$

Teorema da função implícita

Seja $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$. Considere o sistema de n equações e $n+1$ variáveis definido por

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = 0,$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. Se o ponto $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma solução do sistema, na qual a Jacobiana de φ em relação a x tem posto n, então existe uma vizinhança $I \subset \mathbb{R}$ de 0 e uma curva diferenciável $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(0) = \bar{x}$ e $\varphi \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ t \end{pmatrix} = 0$, para todo $t \in I$.

Principais referências

A. Howard and C. Rorres.
Álgebra Linear com Aplicações.
Bookman, Porto Alegre, 8nd edition, 2001.

E. L. Lima.
Curso de Análise, volumes 1 e 2.
IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1981.

G. Strang.
Álgebra Linear e suas Aplicações.
Cengage Learning, 2010.