Otimização Contínua: Aspectos teóricos e computacionais

Ademir Alves Ribeiro
Elizabeth Wegner Karas

Capítulo 2 - Introdução à Otimização

Modelagem matemática

Problemas reais em diversas áreas podem ser formulados matematicamente, dentre os quais:

- Formulação de misturas
- Dieta nutricional
- Corte de barras e chapas
- Logística - transporte
- Designação (pessoas e tarefas)
- Análise de crédito
- Diagnóstico de doenças
- Reconhecimento de voz
- Reconhecimento de padrões

Objetivo: minimizar ou maximizar certa função, como o custo ou o lucro em determinado processo.

CENGAGE Learning

Exemplo: formulação de misturas

Uma indústria produz 2 tipos de aço, de acordo com as informações abaixo.

	Aço 1	Aço 2	Disponibilidade (h/dia)
Tempo de forno (h/Kg)	2	2	8
Tempo de resfriamento (h/Kg)	5	3	15
Lucro unitário (R$/Kg)	120	100	

Determine a quantidade diária, em (Kg), a ser produzida de cada tipo de aço de modo a maximizar o lucro.

Formulação matemática

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & 120x_1 + 100x_2 \\
\text{sujeito a} & 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Solução: Produzir diariamente $1,5$ Kg do Aço 1 e $2,5$ Kg do Aço 2.

Exemplo: formulação de misturas

Uma indústria produz 2 tipos de aço, de acordo com as informações abaixo.

	Aço 1	Aço 2	Disponibilidade (h/dia)
Tempo de forno (h/Kg)	2	2	8
Tempo de resfriamento (h/Kg)	5	3	15
Lucro unitário (R$/Kg)	120	100	

Determine a quantidade diária, em (Kg), a ser produzida de cada tipo de aço de modo a maximizar o lucro.

Formulação matemática

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 120x_1 + 100x_2 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solução: Produzir diariamente $1,5$ Kg do Aço 1 e $2,5$ Kg do Aço 2.

Exemplo: formulação de misturas

Uma indústria produz 2 tipos de aço, de acordo com as informações abaixo.

	Aço 1	Aço 2	Disponibilidade (h/dia)
Tempo de forno (h/Kg)	2	2	8
Tempo de resfriamento (h/Kg)	5	3	15
Lucro unitário (R$/Kg)	120	100	

Determine a quantidade diária, em (Kg), a ser produzida de cada tipo de aço de modo a maximizar o lucro.

Formulação matemática

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 120x_1 + 100x_2 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solução: Produzir diariamente $1,5$ Kg do Aço 1 e $2,5$ Kg do Aço 2.

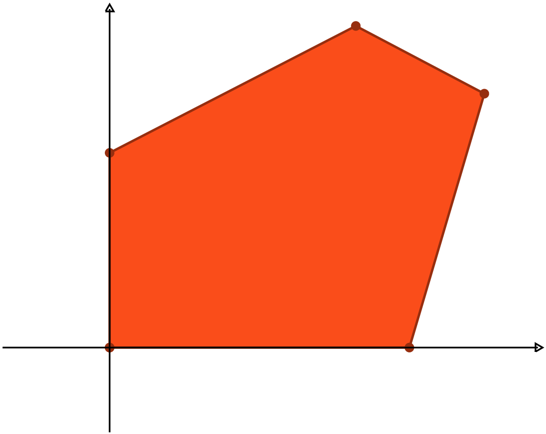
Problema de programação linear

Formulação geral

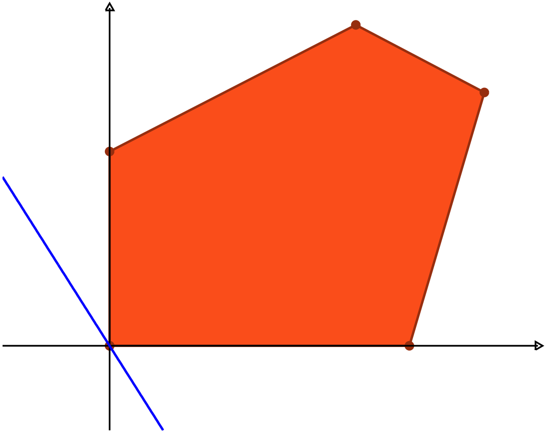
$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

- Dados: $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$
- Incógnitas: $x \in \mathbb{R}^n$

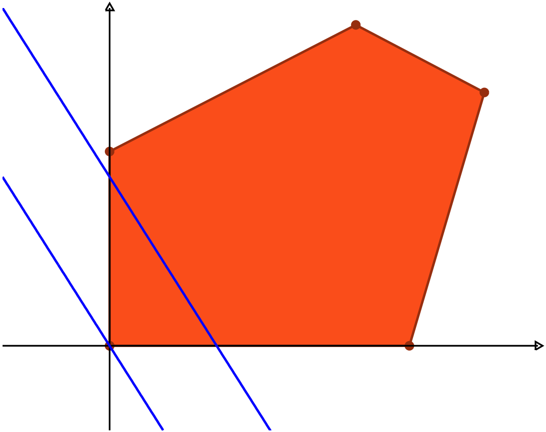
Interpretação geométrica de um PPL



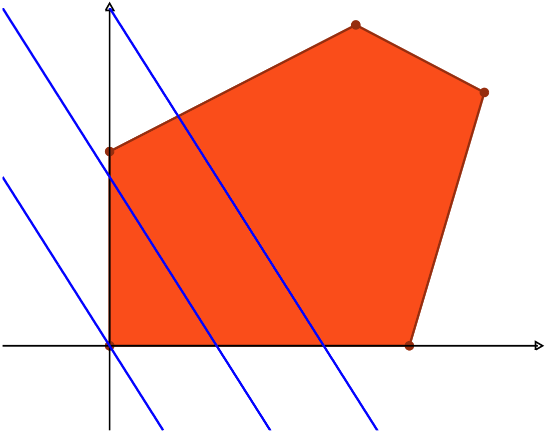
Interpretação geométrica de um PPL



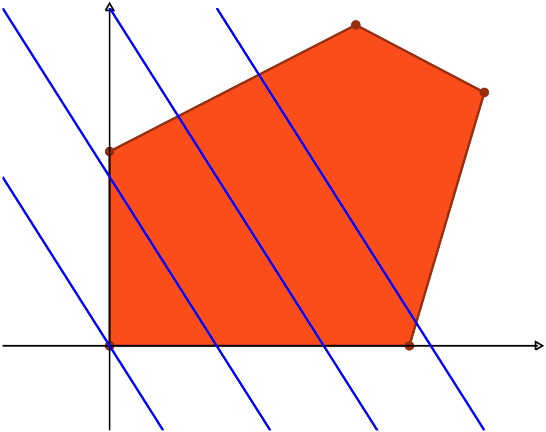
Interpretação geométrica de um PPL



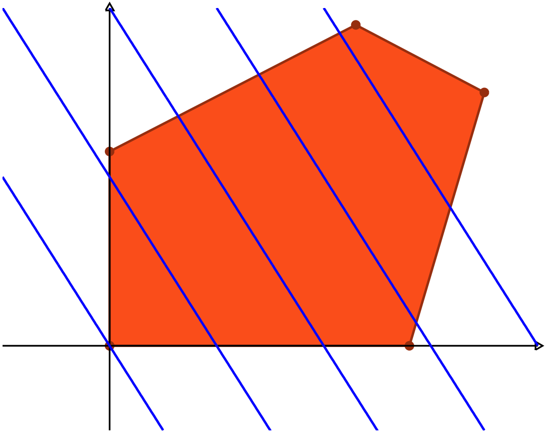
Interpretação geométrica de um PPL



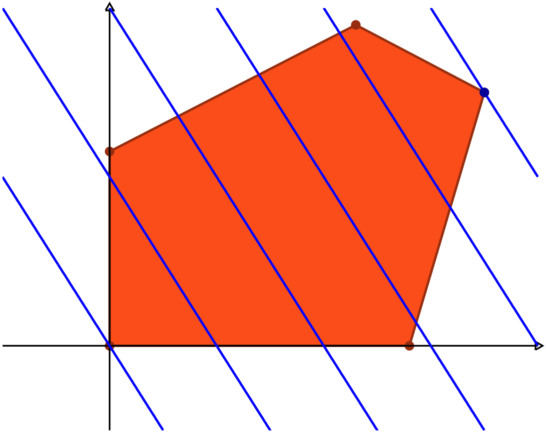
Interpretação geométrica de um PPL



Interpretação geométrica de um PPL



Interpretação geométrica de um PPL



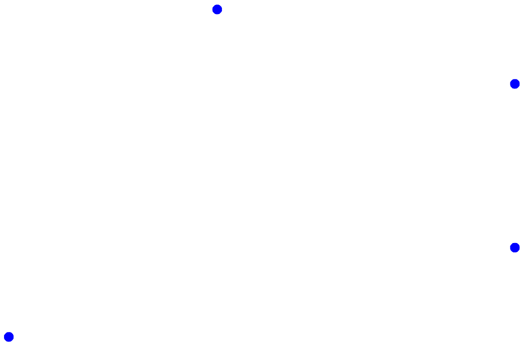
Programação não linear

- Nem todos os problemas podem ser formulados em termos de funções lineares.

Exemplo: problema de localização

O problema

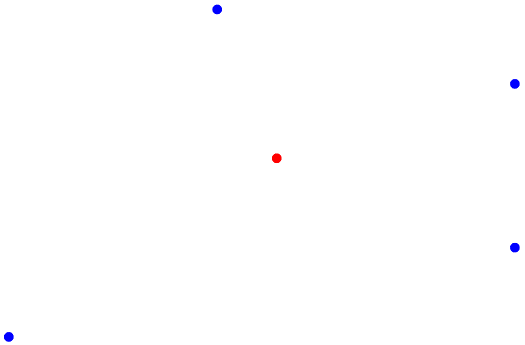
Dados m pontos $y^1, \ldots, y^m$ em $\mathbb{R}^n$, determinar o ponto cuja soma das distâncias aos pontos dados é mínima.



Exemplo: problema de localização

O problema

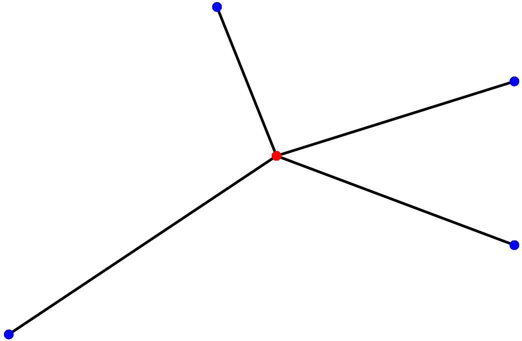
Dados m pontos $y^1, \ldots, y^m$ em $\mathbb{R}^n$, determinar o ponto cuja soma das distâncias aos pontos dados é mínima.



Exemplo: problema de localização

O problema

Dados m pontos $y^1, \dots, y^m$ em $\mathbb{R}^n$, determinar o ponto cuja soma das distâncias aos pontos dados é mínima.



Formulação matemática

Programação não linear

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \left\| x - y^i \right\| \\ x \in \mathbb{R}^n & \end{array}$$

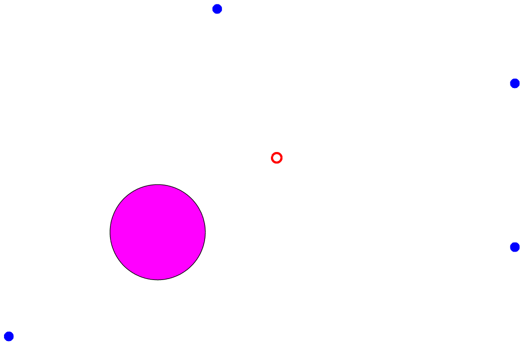
Problema irrestrito

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n & \end{array}$$

Voltando ao problema de localização

O problema

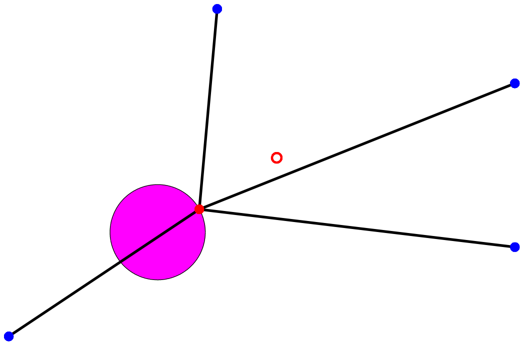
Considere o problema anterior, mas com a restrição de que o ponto procurado deve pertencer a uma região pré-estabelecida.



Voltando ao problema de localização

O problema

Considere o problema anterior, mas com a restrição de que o ponto procurado deve pertencer a uma região pré-estabelecida.



Formulação matemática

Programação não linear

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \left\| x - y^i \right\| \\
\text{sujeito a} & \|x - c\| \leq r
\end{array}
$$

Problema de programação não linear

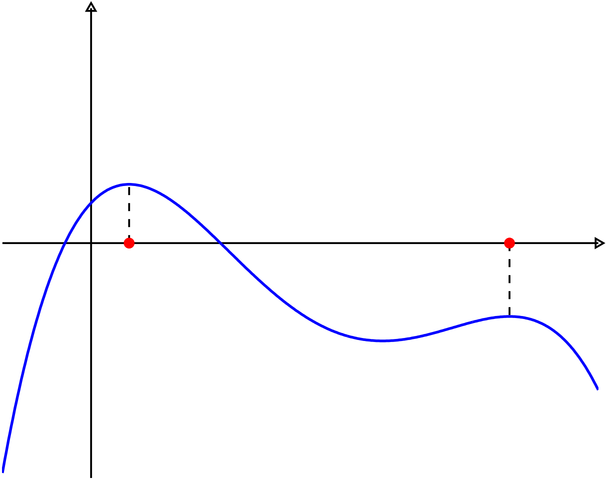
Formulação geral

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array}$$

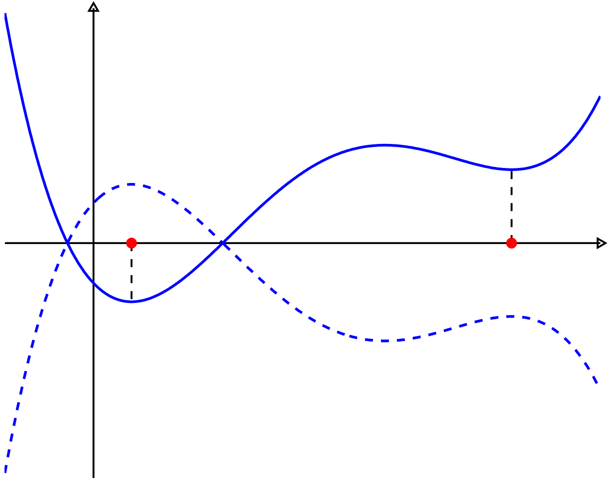
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dita função objetivo.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dito conjunto viável.

Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, o problema é dito irrestrito.

Maximização versus minimização



Maximização versus minimização



Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x^* \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Solução

- x^* é um minimizador local de f em Ω quando existe $\delta > 0$, tal que $f(x^*) \leq f(x)$, para todo $x \in B(x^*, \delta) \cap \Omega$.
- x^* é um minimizador global de f em Ω quando $f(x^*) \leq f(x)$, para todo $x \in \Omega$.

Quando as desigualdades forem estritas para $x \neq x^*$, diremos que x^* é minimizador estrito.

Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x^* \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Solução

- x^* é um minimizador local de f em Ω quando existe $\delta > 0$, tal que $f(x^*) \leq f(x)$, para todo $x \in B(x^*, \delta) \cap \Omega$.
- x^* é um minimizador global de f em Ω quando $f(x^*) \leq f(x)$, para todo $x \in \Omega$.

Quando as desigualdades forem estritas para $x \neq x^*$, diremos que x^* é minimizador estrito.

Problema de programação não linear

Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x^* \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

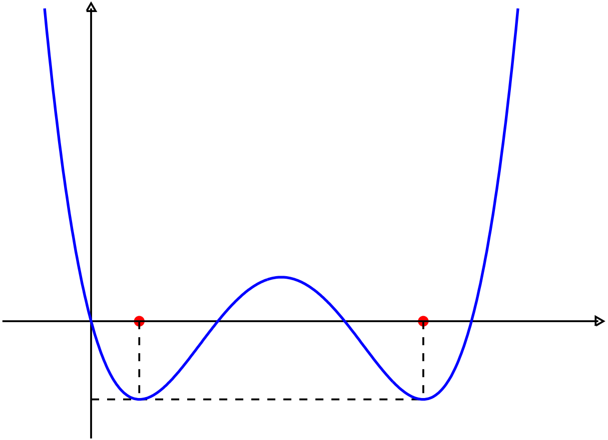
Solução

- x^* é um minimizador local de f em Ω quando existe $\delta > 0$, tal que $f(x^*) \leq f(x)$, para todo $x \in B(x^*, \delta) \cap \Omega$.
- x^* é um minimizador global de f em Ω quando $f(x^*) \leq f(x)$, para todo $x \in \Omega$.

Quando as desigualdades forem estritas para $x \neq x^*$, diremos que x^* é minimizador estrito.

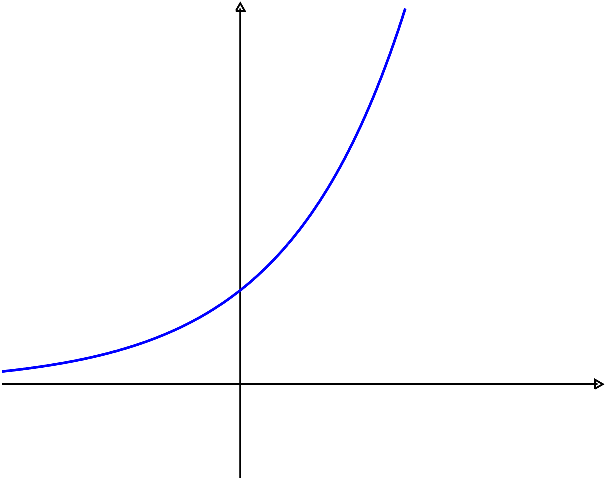
Unicidade de minimizadores

O minimizador pode não ser único.



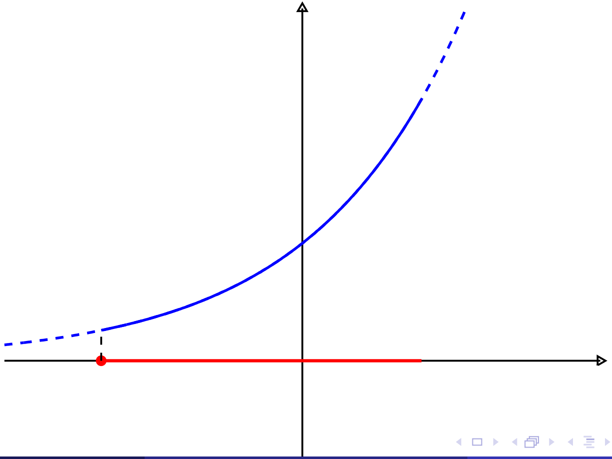
Existência de minimizadores

O minimizador pode não existir.



Teorema de Weierstrass

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ compacto não vazio. Então existe minimizador global de f em Ω.



Corolário do teorema de Weierstrass

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua e suponha que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que o conjunto $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq c\}$ é compacto não vazio. Então f tem um minimizador global.

Existência de minimizadores

Função coerciva

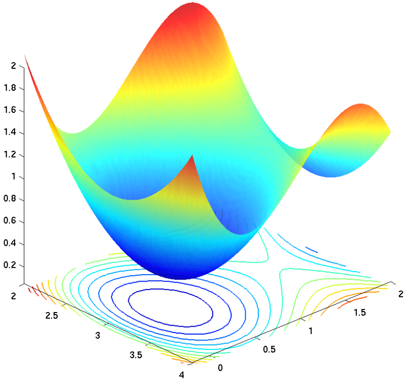
Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é coerciva quando $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$, ou seja, quando para todo $M > 0$, existe $r > 0$ tal que $f(x) > M$ sempre que $\|x\| > r$.

Teorema

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua e coerciva. Então, f tem um minimizador global.

Condição necessária de 1ª ordem para problemas irrestritos

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$.
Se x^* é um minimizador local de f, então x^* é um ponto crítico (ou estacionário) de f, ou seja, $\nabla f(x^*) = 0$.



Condições de otimalidade para minimização irrestrita

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \text{sen}\,(3x_1^2 + x_2^2) + \cos(x_1^2 - x_2^2) + 5x_3.$$

- f tem minimizadores em $\mathbb{R}^3$?

  $\nabla f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x) = 5.$

  Logo, f não tem pontos críticos e consequentemente não existe minimizador de f em $\mathbb{R}^3$.

- f tem minimizadores em $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{4} + \dfrac{x_3^2}{9} \leq 1 \right\}$?

  Como f é contínua e B é compacto, o Teorema de Weierstrass garante que existe minimizador de f em B.

Condições de otimalidade para minimização irrestrita

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \operatorname{sen}(3x_1^2 + x_2^2) + \cos(x_1^2 - x_2^2) + 5x_3.$$

- f tem minimizadores em $\mathbb{R}^3$?

  $\nabla f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x) = 5$.

  Logo, f não tem pontos críticos e consequentemente não existe minimizador de f em $\mathbb{R}^3$.

- f tem minimizadores em $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{4} + \dfrac{x_3^2}{9} \leq 1 \right\}$?

  Como f é contínua e B é compacto, o Teorema de Weierstrass garante que existe minimizador de f em B.

CENGAGE Learning

Condições de otimalidade para minimização irrestrita

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \text{sen}\,(3x_1^2 + x_2^2) + \cos(x_1^2 - x_2^2) + 5x_3.$$

- f tem minimizadores em $\mathbb{R}^3$?

  $\nabla f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x) = 5$.

  Logo, f não tem pontos críticos e consequentemente não existe minimizador de f em $\mathbb{R}^3$.

- f tem minimizadores em $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{4} + \dfrac{x_3^2}{9} \leq 1 \right\}$?

  Como f é contínua e B é compacto, o Teorema de Weierstrass garante que existe minimizador de f em B.

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \text{sen}\,(3x_1^2 + x_2^2) + \cos(x_1^2 - x_2^2) + 5x_3.$$

- f tem minimizadores em $\mathbb{R}^3$?

  $\nabla f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x) = 5$.

  Logo, f não tem pontos críticos e consequentemente não existe minimizador de f em $\mathbb{R}^3$.

- f tem minimizadores em $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{4} + \dfrac{x_3^2}{9} \leq 1 \right\}$?

  Como f é contínua e B é compacto, o Teorema de Weierstrass garante que existe minimizador de f em B.

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(3x_1^2 + x_2^2\right) + \cos(x_1^2 - x_2^2) + 5x_3.$$

- f tem minimizadores em $\mathbb{R}^3$?

  $\nabla f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x) = 5$.

  Logo, f não tem pontos críticos e consequentemente não existe minimizador de f em $\mathbb{R}^3$.

- f tem minimizadores em $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{4} + \dfrac{x_3^2}{9} \leq 1 \right\}$?

  Como f é contínua e B é compacto, o Teorema de Weierstrass garante que existe minimizador de f em B.

Condição necessária de 2ª ordem

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* é um minimizador local de f, então a matriz Hessiana de f no ponto x^* é semidefinida positiva, isto é, $d^T \nabla^2 f(x^*) d \geq 0$, para todo $d \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo

> Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$.

Verifique que:

- $\bar{x} = 0$ é o único ponto estacionário de f e não é minimizador.
  - $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - \frac{3}{2}x_2^2 \\ -3x_1x_2 + 2x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0.$
  - $f\left(\frac{2}{3}x_2^2, x_2\right) = -\dfrac{x_2^4}{18} < 0 \quad \Rightarrow \bar{x} = 0$ não é minimizador local de f.
- $\bar{x}$ minimiza localmente f ao longo de qualquer $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

  Note que, $f(\bar{x} + td) = t^2\left(d_1 - td_2^2\right)\left(d_1 - \frac{1}{2}td_2^2\right)$.
  - Se $d_1 = 0$, então $f(\bar{x} + td) = \frac{1}{2}t^4 d_2^4 \geq 0$.
  - Se $d_1 \neq 0$, $(d_1 - td_2^2)(d_1 - \frac{1}{2}td_2^2) > 0$ em $t = 0$ e, por continuidade, também para t próximo de 0.

Ref.: A. Friedlander. Elementos de programação não-linear, Unicamp, 1994.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$.

Verifique que:

- $\bar{x} = 0$ é o único ponto estacionário de f e não é minimizador.
  - $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - \frac{3}{2}x_2^2 \\ -3x_1x_2 + 2x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0.$
  - $f\left(\frac{2}{3}x_2^2, x_2\right) = -\dfrac{x_2^4}{18} < 0 \quad \Rightarrow \bar{x} = 0$ não é minimizador local de f.
- $\bar{x}$ minimiza localmente f ao longo de qualquer $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

  Note que, $f(\bar{x} + td) = t^2(d_1 - td_2^2)\left(d_1 - \frac{1}{2}td_2^2\right)$.
  - Se $d_1 = 0$, então $f(\bar{x} + td) = \frac{1}{2}t^4 d_2^4 \geq 0$.
  - Se $d_1 \neq 0$, $(d_1 - td_2^2)(d_1 - \frac{1}{2}td_2^2) > 0$ em $t = 0$ e, por continuidade, também para t próximo de 0.

Ref.: A. Friedlander. Elementos de programação não-linear, Unicamp, 1994.

CENGAGE Learning

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$.

Verifique que:

- $\bar{x} = 0$ é o único ponto estacionário de f e não é minimizador.
  - $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - \frac{3}{2}x_2^2 \\ -3x_1x_2 + 2x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0.$
  - $f\left(\frac{2}{3}x_2^2, x_2\right) = -\frac{x_2^4}{18} < 0 \quad \Rightarrow \bar{x} = 0$ não é minimizador local de f.
- $\bar{x}$ minimiza localmente f ao longo de qualquer $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

  Note que, $f(\bar{x} + td) = t^2(d_1 - td_2^2)\left(d_1 - \frac{1}{2}td_2^2\right)$.
  - Se $d_1 = 0$, então $f(\bar{x} + td) = \frac{1}{2}t^4 d_2^4 \geq 0$.
  - Se $d_1 \neq 0$, $(d_1 - td_2^2)(d_1 - \frac{1}{2}td_2^2) > 0$ em $t = 0$ e, por continuidade, também para t próximo de 0.

Ref.: A. Friedlander. Elementos de programação não-linear, Unicamp, 1994.

CENGAGE Learning

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$.

Verifique que:

- $\bar{x} = 0$ é o único ponto estacionário de f e não é minimizador.
  - $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - \frac{3}{2}x_2^2 \\ -3x_1x_2 + 2x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0.$
  - $f\left(\frac{2}{3}x_2^2, x_2\right) = -\frac{x_2^4}{18} < 0 \quad \Rightarrow \bar{x} = 0$ não é minimizador local de f.
- $\bar{x}$ minimiza localmente f ao longo de qualquer $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

  Note que, $f(\bar{x} + td) = t^2 \left(d_1 - td_2^2\right) \left(d_1 - \frac{1}{2}td_2^2\right)$.
  - Se $d_1 = 0$, então $f(\bar{x} + td) = \frac{1}{2}t^4 d_2^4 \geq 0$.
  - Se $d_1 \neq 0$, $(d_1 - td_2^2)(d_1 - \frac{1}{2}td_2^2) > 0$ em $t = 0$ e, por continuidade, também para t próximo de 0.

Ref.: A. Friedlander. Elementos de programação não-linear, Unicamp, 1994.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$.

Verifique que:

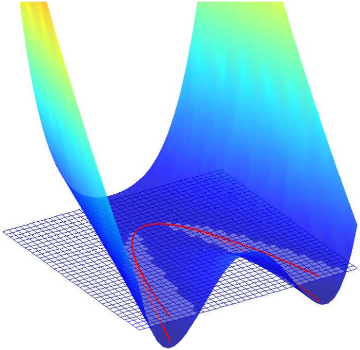
- $\bar{x} = 0$ é o único ponto estacionário de f e não é minimizador.
  - $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - \frac{3}{2}x_2^2 \\ -3x_1x_2 + 2x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0.$
  - $f\left(\frac{2}{3}x_2^2, x_2\right) = -\dfrac{x_2^4}{18} < 0 \quad \Rightarrow \bar{x} = 0$ não é minimizador local de f.
- $\bar{x}$ minimiza localmente f ao longo de qualquer $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

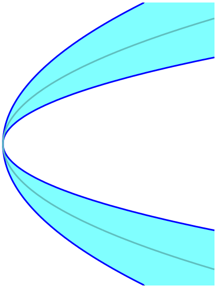
  Note que, $f(\bar{x} + td) = t^2\left(d_1 - td_2^2\right)\left(d_1 - \frac{1}{2}td_2^2\right)$.
  - Se $d_1 = 0$, então $f(\bar{x} + td) = \frac{1}{2}t^4d_2^4 \geq 0$.
  - Se $d_1 \neq 0$, $(d_1 - td_2^2)(d_1 - \frac{1}{2}td_2^2) > 0$ em $t = 0$ e, por continuidade, também para t próximo de 0.

Ref.: A. Friedlander. Elementos de programação não-linear, Unicamp, 1994.

Ilustração do exemplo anterior

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$.

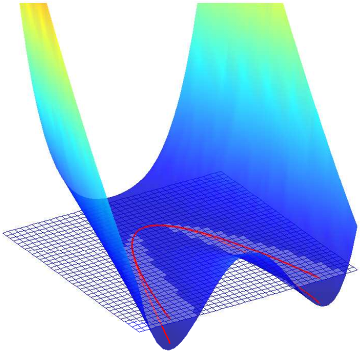


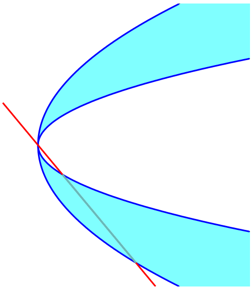


$\bar{x} = 0$ é o único ponto estacionário de f e não é minimizador.

Ilustração do exemplo anterior

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$.





$\bar{x}$ minimiza localmente f ao longo de qualquer $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Condição suficiente de 2ª ordem

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* é um ponto estacionário da função f e $\nabla^2 f(x^*)$ é definida positiva, então x^* é minimizador local estrito de f.

Ponto sela

Definição

Considere uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ um ponto estacionário de f. O ponto $\bar{x}$ é um ponto de sela da função f quando para todo $\varepsilon > 0$, existem $x, y \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ tais que

$$f(x) < f(\bar{x}) < f(y).$$

Teorema

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no ponto estacionário $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Se $\nabla^2 f(\bar{x})$ é indefinida, então $\bar{x}$ é ponto de sela de f.

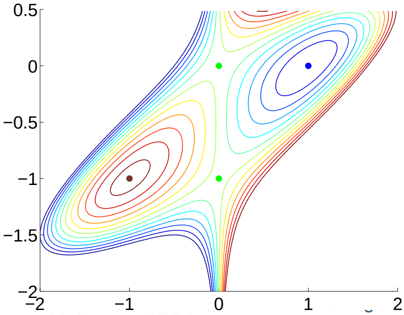
Exemplo

Descreva os pontos estacionários da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1).$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_2^2 + 6x_2 \\ 6x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1 - 12x_2 - 6 & -12x_1 + 12x_2 + 6 \\ -12x_1 + 12x_2 + 6 & 12x_1 \end{pmatrix}.$$

- $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é ponto de sela.
- $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é minimizador local.
- $x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ é ponto de sela.
- $x^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ é maximizador local.



Ref.: A. Friedlander. Elementos de programação não-linear, Unicamp, 1994.

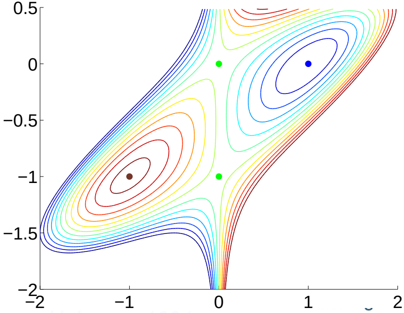
Exemplo

Descreva os pontos estacionários da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1).$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_2^2 + 6x_2 \\ 6x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1 - 12x_2 - 6 & -12x_1 + 12x_2 + 6 \\ -12x_1 + 12x_2 + 6 & 12x_1 \end{pmatrix}.$$

- $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é ponto de sela.
- $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é minimizador local.
- $x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ é ponto de sela.
- $x^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ é maximizador local.



Ref.: A. Friedlander. Elementos de programação não-linear. Unicamp, 1994.

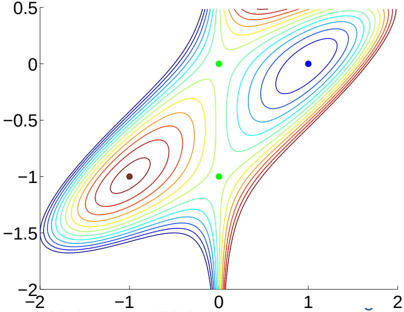
Exemplo

Descreva os pontos estacionários da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1).$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_2^2 + 6x_2 \\ 6x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1 - 12x_2 - 6 & -12x_1 + 12x_2 + 6 \\ -12x_1 + 12x_2 + 6 & 12x_1 \end{pmatrix}.$$

- $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é ponto de sela.
- $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é minimizador local.
- $x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ é ponto de sela.
- $x^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ é maximizador local.



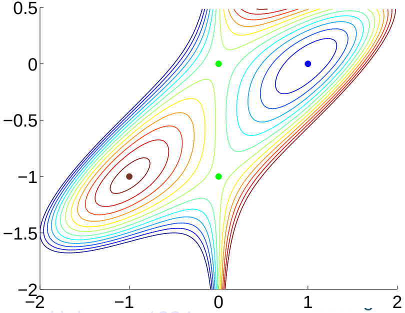
Ref.: A. Friedlander. Elementos de programação não-linear, Unicamp, 1994.

Descreva os pontos estacionários da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1).$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_2^2 + 6x_2 \\ 6x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1 - 12x_2 - 6 & -12x_1 + 12x_2 + 6 \\ -12x_1 + 12x_2 + 6 & 12x_1 \end{pmatrix}.$$

- $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é ponto de sela.
- $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é minimizador local.
- $x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ é ponto de sela.
- $x^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ é maximizador local.



Ref.: A. Friedlander. Elementos de programação não-linear, Unicamp, 1994.

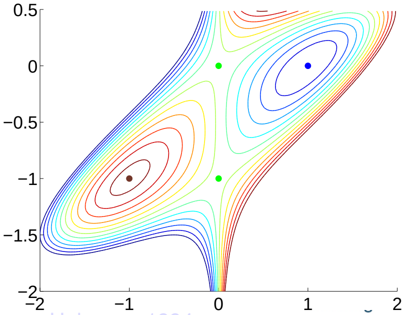
Exemplo

Descreva os pontos estacionários da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1).$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_2^2 + 6x_2 \\ 6x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1 - 12x_2 - 6 & -12x_1 + 12x_2 + 6 \\ -12x_1 + 12x_2 + 6 & 12x_1 \end{pmatrix}.$$

- $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é ponto de sela.
- $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é minimizador local.
- $x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ é ponto de sela.
- $x^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ é maximizador local.



Ref.: A. Friedlander. Elementos de programação não-linear, Unicamp, 1994.

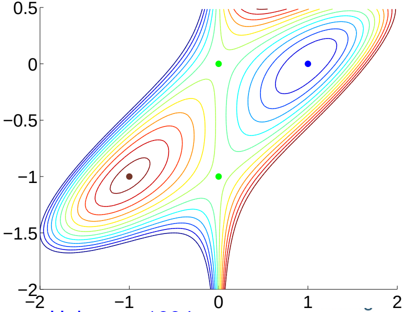
Exemplo

Descreva os pontos estacionários da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1).$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_2^2 + 6x_2 \\ 6x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 12x_1 - 12x_2 - 6 & -12x_1 + 12x_2 + 6 \\ -12x_1 + 12x_2 + 6 & 12x_1 \end{pmatrix}.$$

- $x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é ponto de sela.
- $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é minimizador local.
- $x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ é ponto de sela.
- $x^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ é maximizador local.



Ref.: A. Friedlander. Elementos de programação não-linear, Unicamp, 1994.

Principais referências

A. Friedlander.
Elementos de Programação Não-Linear.
Unicamp, 1994.

A. Izmailov and M. Solodov.
Otimização: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e Dualidade, volume 1.
IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

J. M. Martínez and S. A. Santos.
Métodos computacionais de otimização.
20.^{0} Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA, 1995.