Otimização Contínua: Aspectos teóricos e computacionais

Ademir Alves Ribeiro
Elizabeth Wegner Karas

Capítulo 3 - Convexidade

CENGAGE Learning

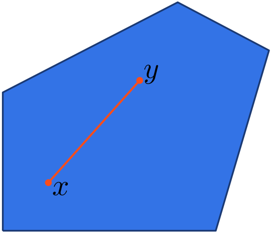
Conjunto convexo

Definicao

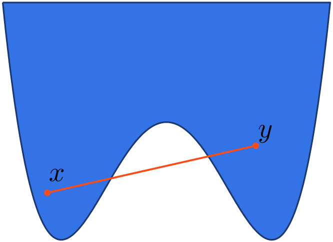
Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo quando dados $x, y \in C$, o segmento

$$[x,y] = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}$$

estiver inteiramente contido em C.



Conjunto convexo



Conjunto não convexo

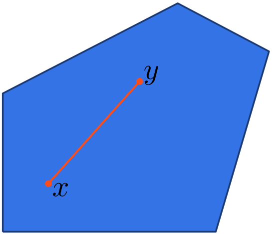
Conjunto convexo

Definicao

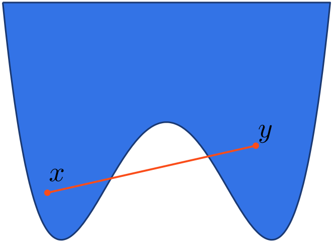
Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo quando dados $x, y \in C$, o segmento

$$[x,y] = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}$$

estiver inteiramente contido em C.



Conjunto convexo



Conjunto não convexo

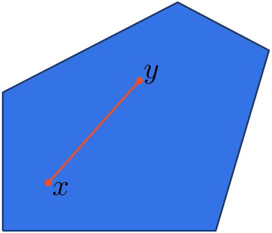
Conjunto convexo

Definicao

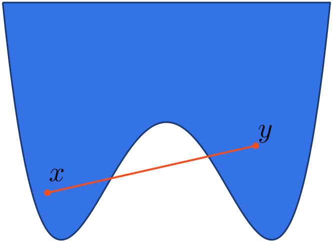
Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo quando dados $x, y \in C$, o segmento

$$[x,y] = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}$$

estiver inteiramente contido em C.



Conjunto convexo



Conjunto não convexo

Conjunto convexo

Exemplo

Sejam C_i, $i = 1, \dots, m$ conjuntos convexos.

- O conjunto interseção $C = \bigcap_{i=1}^{m} C_i$ também é convexo.
- Por outro lado, a união de convexos não é convexa.

Conjunto convexo

Exemplo

Sejam C_i, $i = 1, \ldots, m$ conjuntos convexos.

- O conjunto interseção $C = \bigcap_{i=1}^{m} C_i$ também é convexo.
- Por outro lado, a união de convexos não é convexa.

Exemplo

O conjunto solução de um sistema de equações lineares é convexo.

De fato:

Seja $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$.

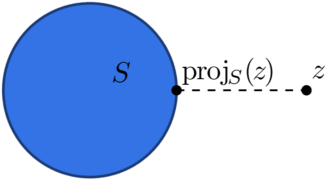
Se $Ax = b$ e $Ay = b$, então $A\big((1-t)x + ty\big) = b$.

Projeção de um ponto sobre um conjunto

Lema

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado não vazio. Dado $z \in \mathbb{R}^n$, existe $\bar{z} \in S$ tal que, para todo $x \in S$,

$$\|z - \bar{z}\| \leq \|z - x\|.$$

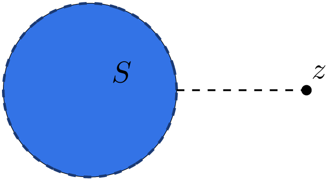


$$\bar{z} = \text{proj}_S(z)$$

Lema

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado não vazio. Dado $z \in \mathbb{R}^n$, existe $\bar{z} \in S$ tal que, para todo $x \in S$,

$$\|z - \bar{z}\| \leq \|z - x\|.$$

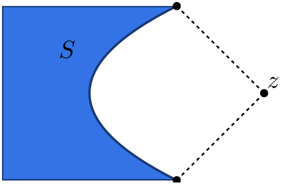


Não existe $\bar{z}$. O conjunto não é fechado.

Lema

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado não vazio. Dado $z \in \mathbb{R}^n$, existe $\bar{z} \in S$ tal que, para todo $x \in S$,

$$\|z - \bar{z}\| \leq \|z - x\|.$$



O ponto projeção pode não ser único.

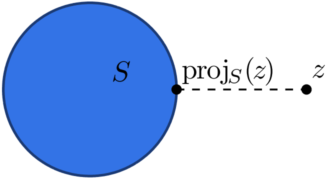
Unicidade da projeção de um ponto sobre um conjunto

Lema

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio, convexo e fechado. Dado $z \in \mathbb{R}^n$, existe um único $\bar{z} \in S$ tal que

$$\|z - \bar{z}\|_2 \leq \|z - x\|_2,$$

para todo $x \in S$.



$$\bar{z} = \mathrm{proj}_S(z)$$

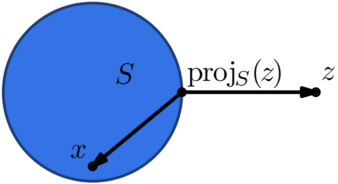
CENGAGE Learning

Teorema

Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio, convexo e fechado, $z \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{z} = \text{proj}_S(z)$. Então

$$(z - \bar{z})^T (x - \bar{z}) \leq 0,$$

para todo $x \in S$.

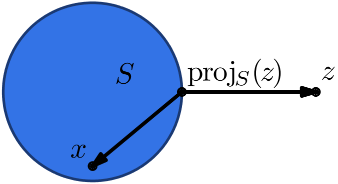


Vale a recíproca

Sejam $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não vazio, convexo e fechado e $z \in \mathbb{R}^n$. Se $\bar{z} \in S$ satisfaz

$$(z - \bar{z})^T (x - \bar{z}) \leq 0,$$

para todo $x \in S$, então $\bar{z} = \text{proj}_S(z)$.

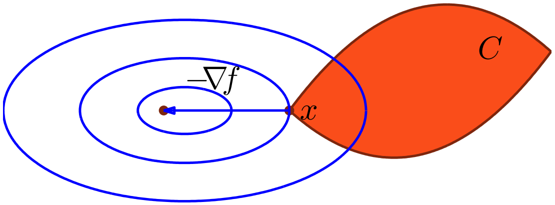


Teorema

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo e fechado. Se $x^* \in C$ é minimizador local de f em C, então

$$\text{proj}_C\left(x^* - \alpha\nabla f(x^*)\right) = x^*,$$

para todo $\alpha \geq 0$.



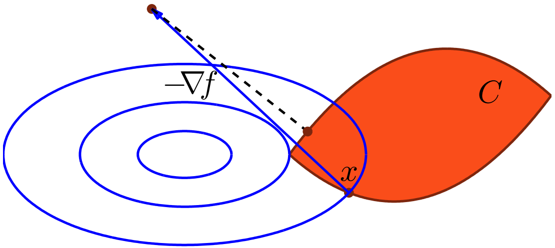
Minimização em convexos e fechados

Teorema

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo e fechado. Se $x^* \in C$ é minimizador local de f em C, então

$$\text{proj}_C\left(x^* - \alpha\nabla f(x^*)\right) = x^*,$$

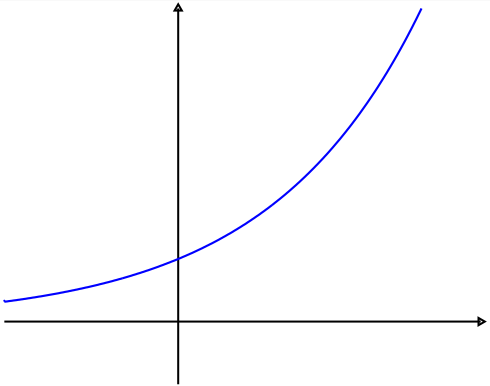
para todo $\alpha \geq 0$.



Função convexa

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa em C quando, para todos $x, y \in C$ e $t \in [0,1]$,

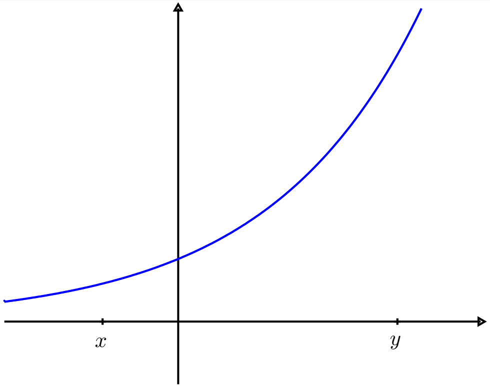
$$f\big((1-t)x+ty\big) \leq (1-t)f(x)+tf(y).$$



Função convexa

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa em C quando, para todos $x, y \in C$ e $t \in [0,1]$,

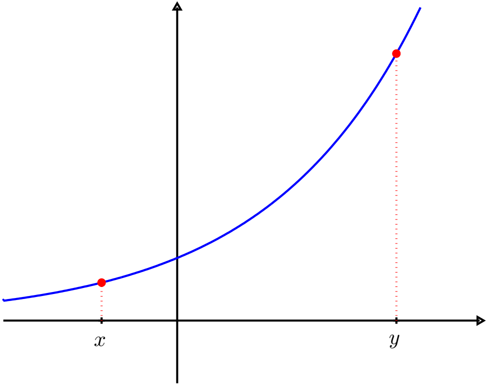
$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$



Função convexa

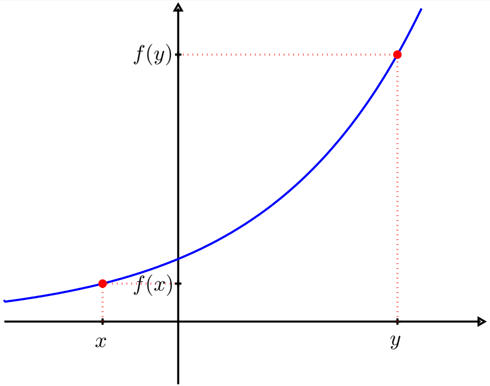
Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa em C quando, para todos $x, y \in C$ e $t \in [0,1]$,

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$



Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa em C quando, para todos $x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$,

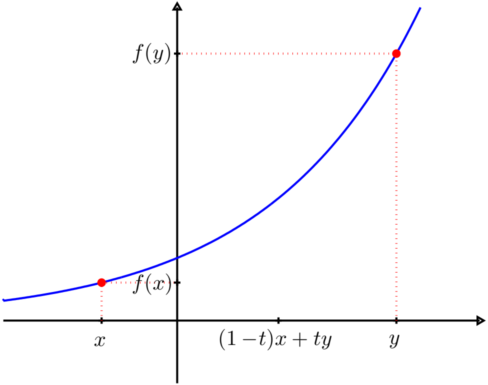
$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$



Função convexa

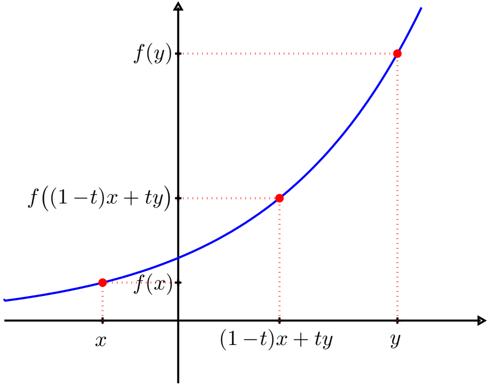
Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa em C quando, para todos $x, y \in C$ e $t \in [0,1]$,

$$f\big((1-t)x+ty\big) \leq (1-t)f(x)+tf(y).$$



Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa em C quando, para todos $x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$,

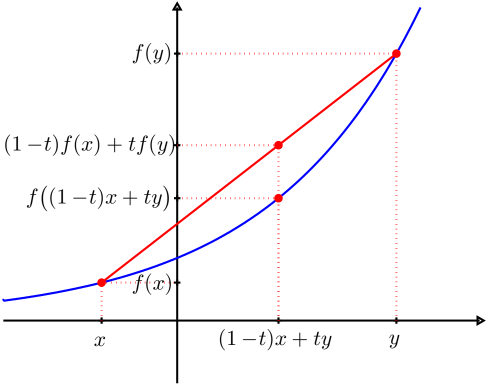
$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$



Função convexa

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa em C quando, para todos $x, y \in C$ e $t \in [0,1]$,

$$f\big((1-t)x + ty\big) \le (1-t)f(x) + tf(y).$$

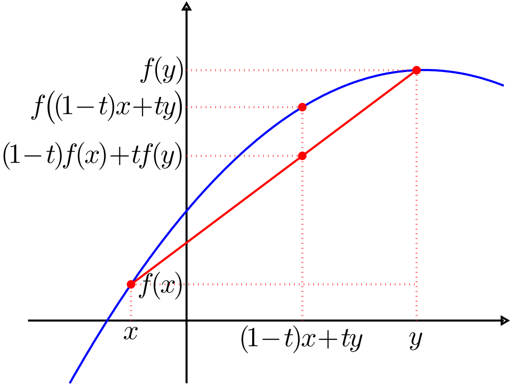


CENGAGE Learning

Função convexa

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa em C quando, para todos $x, y \in C$ e $t \in [0,1]$,

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$



Função não convexa

Função convexa

Exemplos de funções convexas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $f(x) = x^2$.
- $f(x) = e^x$.

Função convexa

Exemplos de funções convexas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $f(x) = x^2$.
- $f(x) = e^x$.

Função convexa

Teorema

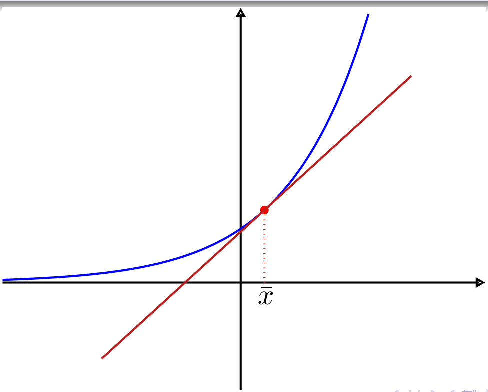
Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo e $f : C \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Se $x^* \in C$ é minimizador local de f, então x^* é minimizador global de f.

Função convexa diferenciável

Teorema

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. A função f é convexa em C se, e somente se, para todos $x, y \in C$,

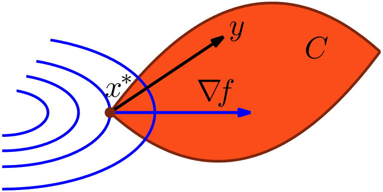
$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x).$$



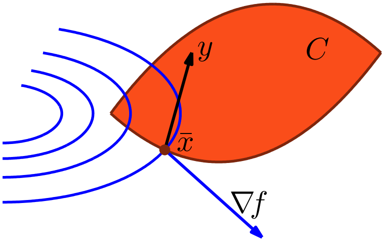
Função convexa diferenciável

Corolário

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa, diferenciável e $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Se $\nabla f(x^*)^T(y - x^*) \geq 0$, para todo $y \in C$, então x^* é um minimizador global de f em C. Em particular, todo ponto estacionário é minimizador global.



Hipóteses satisfeitas

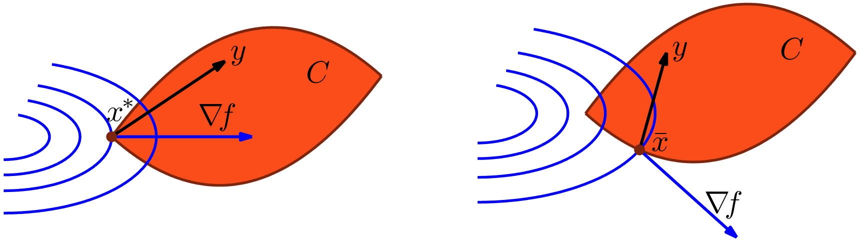


Hipóteses não satisfeitas

Função convexa diferenciável

Corolário

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa, diferenciável e $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Se $\nabla f(x^*)^T(y - x^*) \geq 0$, para todo $y \in C$, então x^* é um minimizador global de f em C. Em particular, todo ponto estacionário é minimizador global.



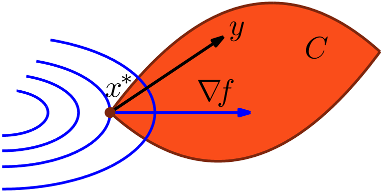
Hipóteses satisfeitas

Hipóteses não satisfeitas

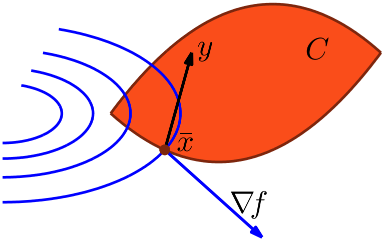
Função convexa diferenciável

Corolário

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa, diferenciável e $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Se $\nabla f(x^*)^T(y - x^*) \geq 0$, para todo $y \in C$, então x^* é um minimizador global de f em C. Em particular, todo ponto estacionário é minimizador global.



Hipóteses satisfeitas



Hipóteses não satisfeitas

Teorema

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função convexa diferenciável e $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo e fechado. Se

$$\text{proj}_C\big(x^* - \nabla f(x^*)\big) = x^*,$$

então $x^* \in C$ é minimizador global de f em C.

Teorema

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo.

(i) Se $\nabla^2 f(x) \geq 0$, para todo $x \in C$, então f é convexa em C.

(ii) Se f é convexa em C e $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, então $\nabla^2 f(x) \geq 0$, para todo $x \in C$.

Principais referências

- D. P. Bertsekas, A. Nedić, and A. E. Ozdaglar.
  Convex Analysis and Optimization.
  Athena Scientific, Belmont, USA, 2003.
- J-B. Hiriart-Urruty and C. Lemarechal.
  Convex Analysis and Minimization Algorithms I.
  Springer-Verlag, New York, 1993.
- A. L. Peressini, F. E. Sullivan, and Jr J. J. Uhl.
  The Mathematics of Nonlinear Programming.
  Springer-Verlag, New York, 1nd edition, 1988.