Otimização Contínua: Aspectos teóricos e computacionais

Ademir Alves Ribeiro
Elizabeth Wegner Karas

Capítulo 4 - Algoritmos

1 Algoritmos de descida

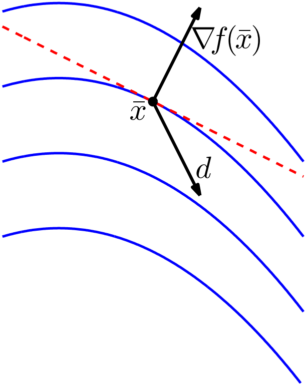
2 Métodos de busca unidirecional
- Busca exata - Algoritmo da Seção Áurea
- Busca inexata - Condição de Armijo

3 Convergência global de algoritmos

Direção de descida

Definição

Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e uma direção $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dizemos que d é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$, quando existe $\delta > 0$ tal que $f(\bar{x} + td) < f(\bar{x})$, para todo $t \in (0, \delta)$.



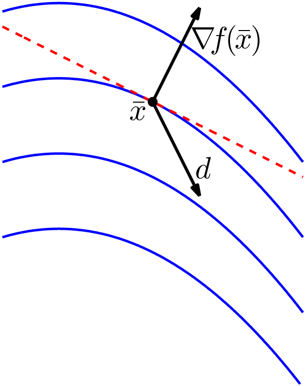
Teorema

Se $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$, então d é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$.

Direção de descida

Definição

Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e uma direção $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dizemos que d é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$, quando existe $\delta > 0$ tal que $f(\bar{x} + td) < f(\bar{x})$, para todo $t \in (0, \delta)$.



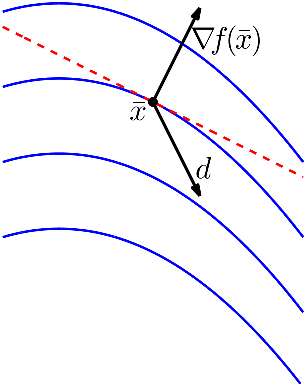
Teorema

Se $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$, então d é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$.

Direção de descida

Definição

Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e uma direção $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dizemos que d é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$, quando existe $\delta > 0$ tal que $f(\bar{x} + td) < f(\bar{x})$, para todo $t \in (0, \delta)$.

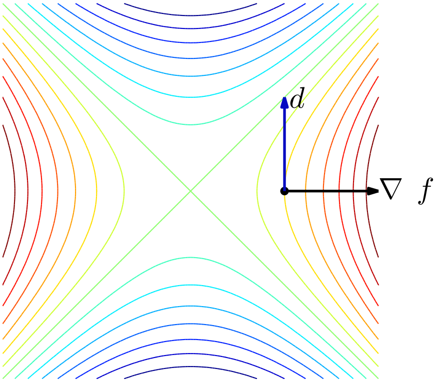


Teorema

Se $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$, então d é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$.

Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ e $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ é tal que $d_1 \leq 0$, então d é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$.



$\nabla f(\bar{x})^T d = d_1.$

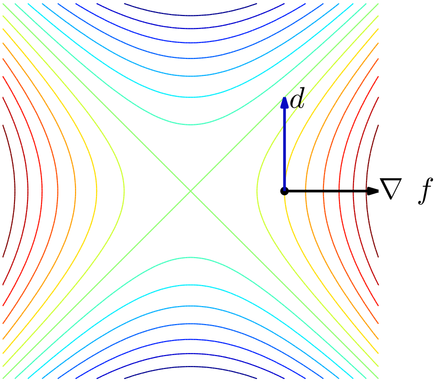
Se $d_1 < 0$, pelo teorema anterior tem-se o resultado.

Se $d_1 = 0$, não podemos usar o teorema, mas basta notar que

$$f(\bar{x} + td) = f(1, td_2) = f(\bar{x}) - \frac{(td_2)^2}{2}.$$

Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ e $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ é tal que $d_1 \leq 0$, então d é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$.



$\nabla f(\bar{x})^T d = d_1$.

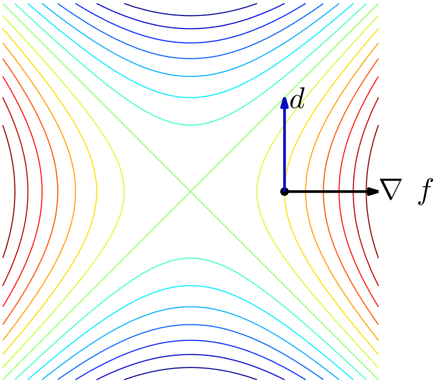
Se $d_1 < 0$, pelo teorema anterior tem-se o resultado.

Se $d_1 = 0$, não podemos usar o teorema, mas basta notar que

$$f(\bar{x} + td) = f(1, td_2) = f(\bar{x}) - \frac{(td_2)^2}{2}.$$

Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ e $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ é tal que $d_1 \leq 0$, então d é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$.



$\nabla f(\bar{x})^T d = d_1.$

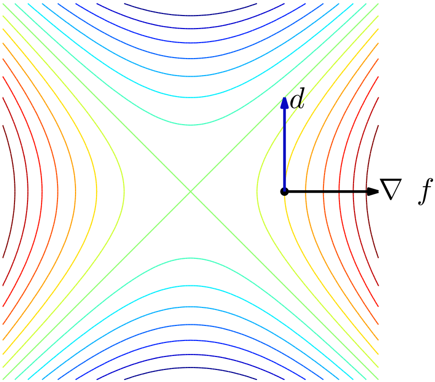
Se $d_1 < 0$, pelo teorema anterior tem-se o resultado.

Se $d_1 = 0$, não podemos usar o teorema, mas basta notar que

$$f(\bar{x} + td) = f(1, td_2) = f(\bar{x}) - \frac{(td_2)^2}{2}.$$

Exemplo

Sejam $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x)=\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)$ e $\bar{x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Se $d=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}$ é tal que $d_1\leq 0$, então d é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$.



$\nabla f(\bar{x})^T d = d_1$.

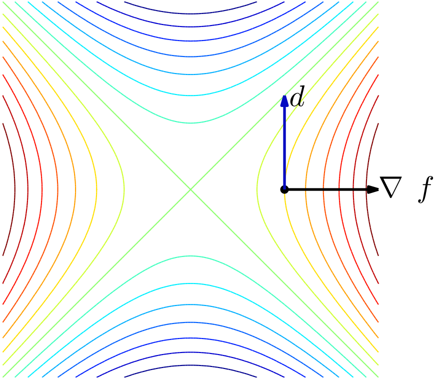
Se $d_1<0$, pelo teorema anterior tem-se o resultado.

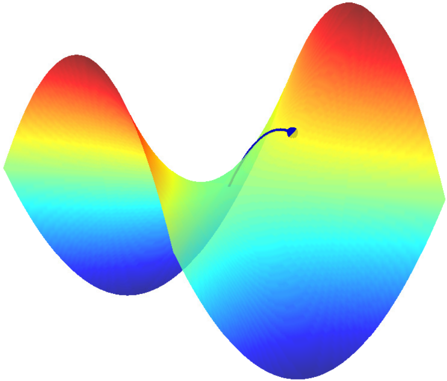
Se $d_1=0$, não podemos usar o teorema, mas basta notar que

$$f(\bar{x}+td)=f(1,td_2)=f(\bar{x})-\frac{(td_2)^2}{2}.$$

Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ e $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ é tal que $d_1 \leq 0$, então d é uma direção de descida para f, a partir de $\bar{x}$.

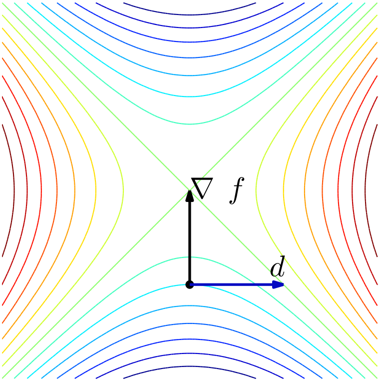




Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ e $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

O que podemos dizer sobre $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?



Não podemos aplicar o teorema anterior, pois $\nabla f(\bar{x})^T d = 0$.
Mas note que

$$f(\bar{x} + td) = f(t, -1) = f(\bar{x}) + \frac{t^2}{2}.$$

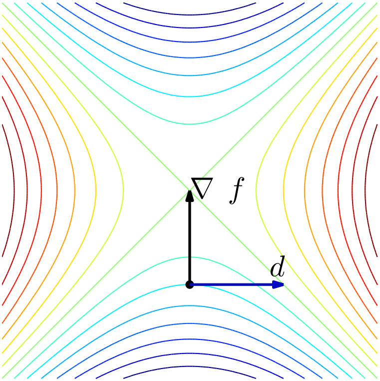
Portanto, a função cresce ao longo de d.
Nada se afirma quando $\nabla f(\bar{x})^T d = 0$.

CENGAGE Learning

Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ e $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

O que podemos dizer sobre $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?



Não podemos aplicar o teorema anterior, pois $\nabla f(\bar{x})^T d = 0$.
Mas note que

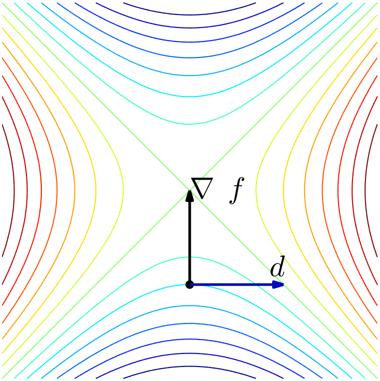
$$f(\bar{x}+td) = f(t,-1) = f(\bar{x}) + \frac{t^2}{2}.$$

Portanto, a função cresce ao longo de d.

Nada se afirma quando $\nabla f(\bar{x})^T d = 0$.

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ e $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

O que podemos dizer sobre $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?



Não podemos aplicar o teorema anterior, pois $\nabla f(\bar{x})^T d = 0$.

Mas note que

$$f(\bar{x} + td) = f(t, -1) = f(\bar{x}) + \frac{t^2}{2}.$$

Portanto, a função cresce ao longo de d.

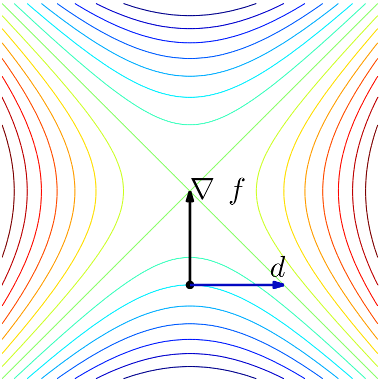
Nada se afirma quando $\nabla f(\bar{x})^T d = 0$.

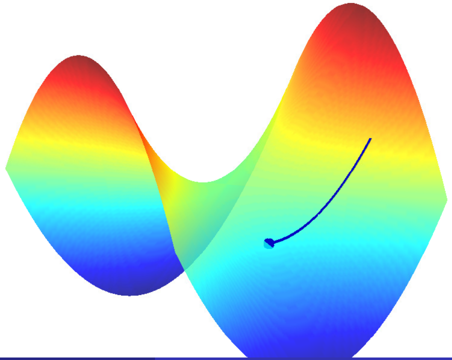
CENGAGE Learning

Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ e $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

O que podemos dizer sobre $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?





Algoritmo básico

Dado: $x^0 \in \mathbb{R}^n$

$k = 0$

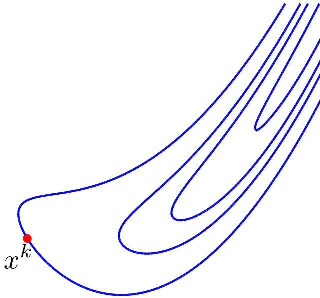
REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$

  Calcule d^k tal que $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$

  Escolha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$

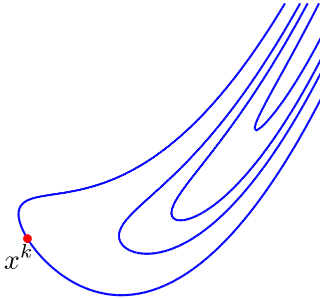
  Faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$

  $k = k + 1$



Algoritmo básico

Dado: $x^0 \in \mathbb{R}^n$
$k = 0$
REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$
    Calcule d^k tal que $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$
    Escolha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$
    Faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$
    $k = k + 1$



Algoritmo básico

Dado: $x^0 \in \mathbb{R}^n$

$k = 0$

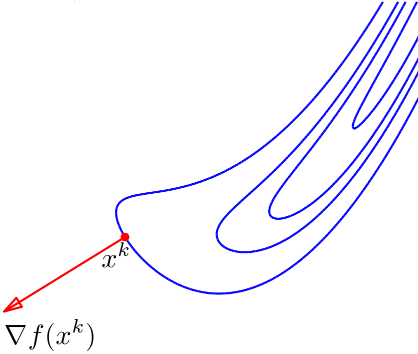
REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$

Calcule d^k tal que $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$

Escolha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$

Faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$

$k = k + 1$



Algoritmo básico

Dado: $x^0 \in \mathbb{R}^n$

$k = 0$

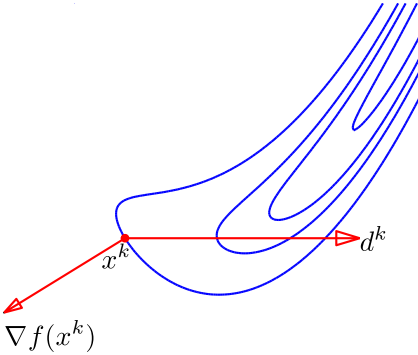
REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$

Calcule d^k tal que $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$

Escolha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$

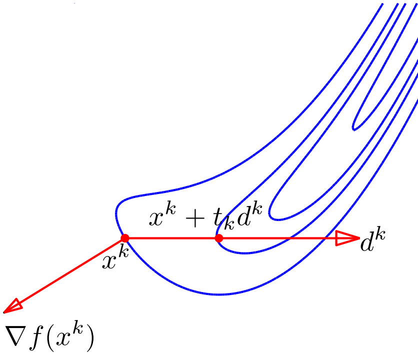
Faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$

$k = k + 1$



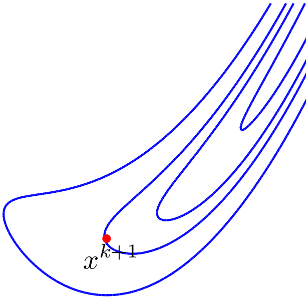
Dado: $x^0 \in \mathbb{R}^n$
$k = 0$
REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$

  Calcule d^k tal que $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$
  Escolha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$
  Faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$
  $k = k + 1$



Algoritmo básico

Dado: $x^0 \in \mathbb{R}^n$
$k = 0$
REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$
    Calcule d^k tal que $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$
    Escolha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$
    Faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$
    $k = k + 1$



Algoritmo básico

Dado: $x^0 \in \mathbb{R}^n$

$k = 0$

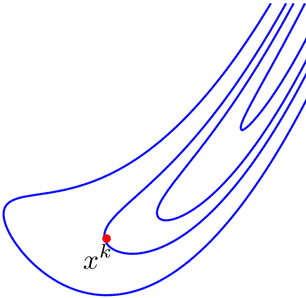
REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$

  Calcule d^k tal que $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$

  Escolha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$

  Faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$

  $k = k + 1$



Algoritmo básico

O Algoritmo ou encontra um ponto estacionário em um número finito de iterações ou gera uma sequência ao longo da qual f decresce.

A questão agora é saber se esta sequência tem algum ponto de acumulação e, em caso afirmativo, se este ponto é estacionário.

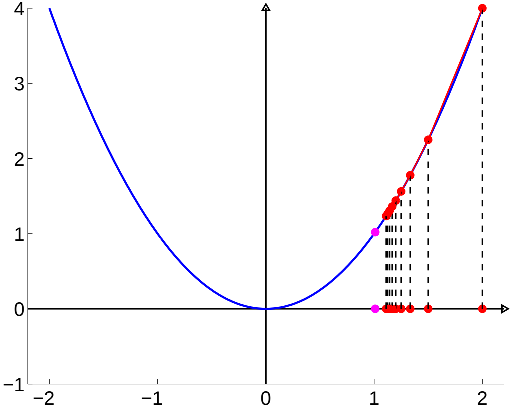
Algoritmo básico

O Algoritmo ou encontra um ponto estacionário em um número finito de iterações ou gera uma sequência ao longo da qual f decresce.

A questão agora é saber se esta sequência tem algum ponto de acumulação e, em caso afirmativo, se este ponto é estacionário.

Algoritmo básico

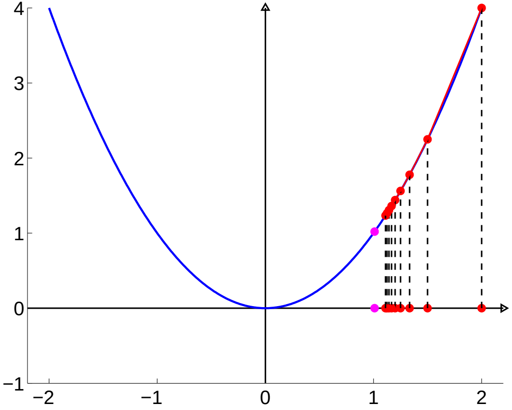
Considere $f(x) = x^2$ e a sequência $x^k = 1 + \dfrac{1}{k+1}$ obtida pelo algoritmo.



$x^k \to 1$ que não é minimizador da função.

Algoritmo básico

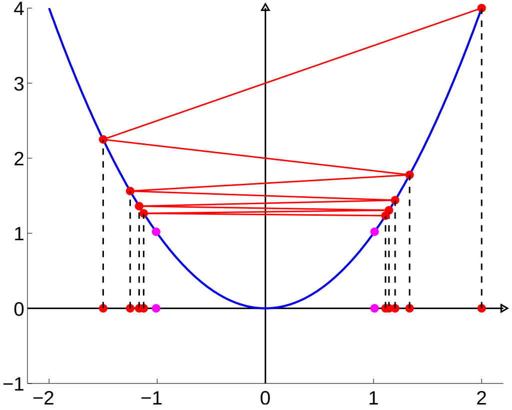
Considere $f(x) = x^2$ e a sequência $x^k = 1 + \dfrac{1}{k+1}$ obtida pelo algoritmo.



$x^k \to 1$ que não é minimizador da função.

Algoritmo básico

Considere $f(x) = x^2$ e a sequência $y^k = (-1)^k + \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ obtida pelo algoritmo.

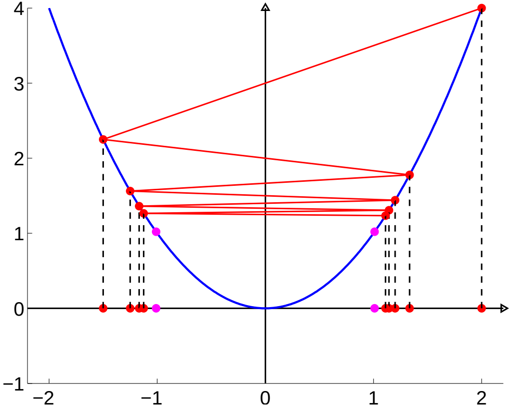


(y^k) tem dois pontos de acumulação, 1 e -1.

Nenhum destes pontos minimiza a função.

Algoritmo básico

Considere $f(x) = x^2$ e a sequência $y^k = (-1)^k + \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ obtida pelo algoritmo.



(y^k) tem dois pontos de acumulação, 1 e -1.

Nenhum destes pontos minimiza a função.

Algoritmo básico

Para garantir convergência do algoritmo, precisamos fazer escolhas razoáveis:

- da direção d^k;
- do tamanho do passo t_k.

Escolha do tamanho do passo t_k

Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e uma direção de descida $d \in \mathbb{R}^n$, queremos encontrar $\bar{t} > 0$ tal que

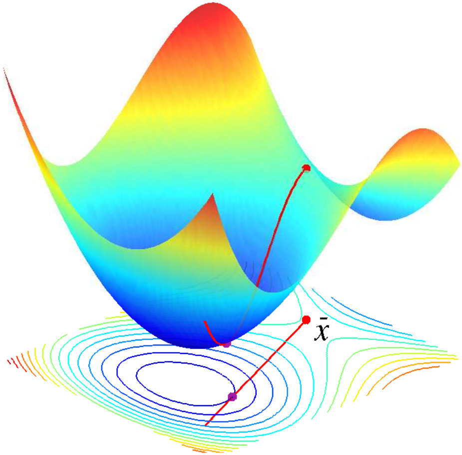
$$f(\bar{x} + \bar{t}d) < f(\bar{x}).$$

Veremos duas abordagens:

- busca exata a partir do ponto $\bar{x}$ segundo a direção d.
- procura uma redução suficiente de f que seja de certo modo proporcional ao tamanho do passo.

Busca exata

Nosso objetivo consiste em minimizar f a partir do ponto $\bar{x}$ na direção d.

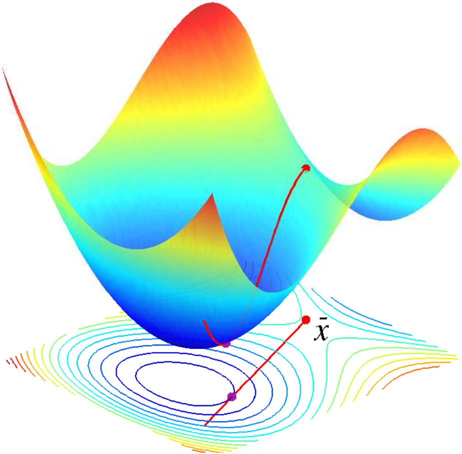


Problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(\bar{x}+td) \\ \text{sujeito a} & t > 0. \end{array}$$

Busca exata

Nosso objetivo consiste em minimizar f a partir do ponto $\bar{x}$ na direção d.



Problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(\bar{x}+td) \\ \text{sujeito a} & t > 0. \end{array}$$

Busca exata - Exemplo com solução algébrica

Considere $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Faça a busca exata a partir de $\bar{x}$, na direção d.

- A direção é de descida, pois $\nabla f(\bar{x})^T d = (-1 \;\; -2) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 < 0$.
- Defina $\varphi(t) = f(\bar{x} + td) = f(1 + 3t, t) = \frac{11t^2}{2} - 5t + \frac{3}{2}$, cujo minimizador satisfaz $\varphi'(t) = 11t - 5 = 0$.
- Assim, $\bar{t} = \frac{5}{11}$ e $\bar{x} + \bar{t}d = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 26 \\ 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,36 \\ 0,45 \end{pmatrix}$.

Busca exata - Exemplo com solução algébrica

Considere $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Faça a busca exata a partir de $\bar{x}$, na direção d.

- A direção é de descida, pois $\nabla f(\bar{x})^T d = (-1 \ \ -2) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 < 0$.
- Defina $\varphi(t) = f(\bar{x} + td) = f(1 + 3t, t) = \frac{11t^2}{2} - 5t + \frac{3}{2}$, cujo minimizador satisfaz $\varphi'(t) = 11t - 5 = 0$.
- Assim, $\bar{t} = \frac{5}{11}$ e $\bar{x} + \bar{t}d = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 26 \\ 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,36 \\ 0,45 \end{pmatrix}$.

Considere $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Faça a busca exata a partir de $\bar{x}$, na direção d.

- A direção é de descida, pois $\nabla f(\bar{x})^T d = (-1 \;\; -2) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 < 0$.
- Defina $\varphi(t) = f(\bar{x} + td) = f(1 + 3t, t) = \frac{11t^2}{2} - 5t + \frac{3}{2}$, cujo minimizador satisfaz $\varphi'(t) = 11t - 5 = 0$.
- Assim, $\bar{t} = \frac{5}{11}$ e $\bar{x} + \bar{t}d = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 26 \\ 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,36 \\ 0,45 \end{pmatrix}$.

Busca exata - Exemplo com solução algébrica

Considere $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Faça a busca exata a partir de $\bar{x}$, na direção d.

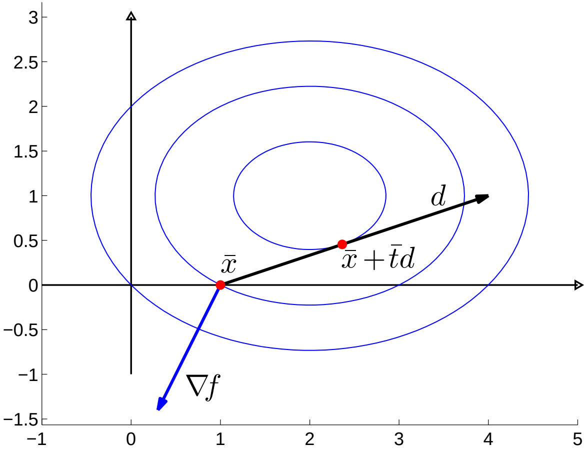
- A direção é de descida, pois $\nabla f(\bar{x})^T d = (-1 \;\; -2)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 < 0$.
- Defina $\varphi(t) = f(\bar{x} + td) = f(1 + 3t, t) = \dfrac{11t^2}{2} - 5t + \dfrac{3}{2}$, cujo minimizador satisfaz $\varphi'(t) = 11t - 5 = 0$.
- Assim, $\bar{t} = \dfrac{5}{11}$ e $\bar{x} + \bar{t}d = \dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 26 \\ 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2,36 \\ 0,45 \end{pmatrix}$.

CENGAGE Learning

Busca exata - Exemplo com solução algébrica

Considere $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Faça a busca exata a partir de $\bar{x}$, na direção d.



Busca exata

Solução algébrica normalmente não é possível.

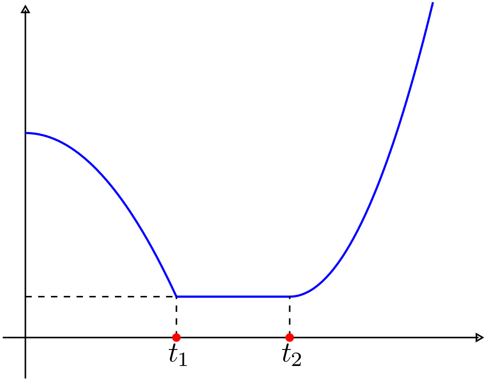
Veremos o algoritmo de seção áurea.

Precisamos do conceito de função unimodal.

Funções unimodais

Definição

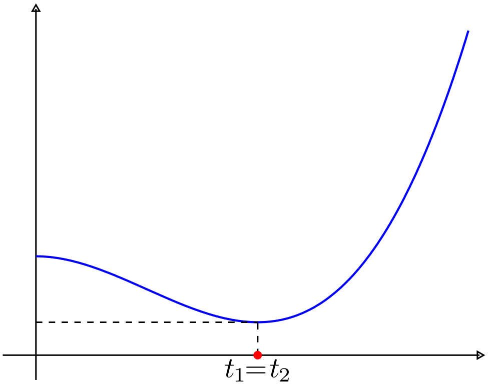
Uma função contínua $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é unimodal quando admite um conjunto de minimizadores $[x_1, x_2]$, é estritamente decrescente em $[0, x_1]$ e estritamente crescente em $[x_2, \infty)$.



Funções unimodais

Definição

Uma função contínua $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é unimodal quando admite um conjunto de minimizadores $[x_1, x_2]$, é estritamente decrescente em $[0, x_1]$ e estritamente crescente em $[x_2, \infty)$.

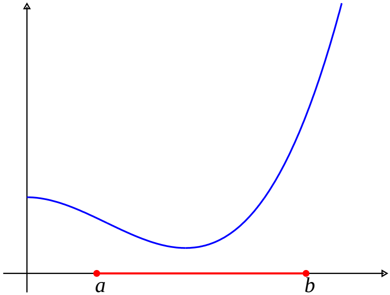


Ideia do algoritmo

- Suponha que um minimizador de f pertence ao intervalo $[a,b]$.

Ideia do algoritmo

1. $a < u < v < b$.
2. $f(u) < f(v) \Rightarrow$ descarta $[v,b]$.
3. $f(u) \geq f(v) \Rightarrow$ descarta $[a,u]$.
4. Repita o processo.

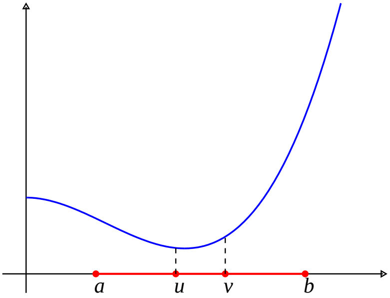


CENGAGE Learning

- Suponha que um minimizador de f pertence ao intervalo $[a, b]$.

Ideia do algoritmo

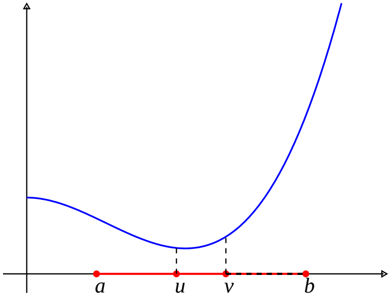
1. $a < u < v < b$.
2. $f(u) < f(v) \Rightarrow$ descarta $[v, b]$.
3. $f(u) \geq f(v) \Rightarrow$ descarta $[a, u]$.
4. Repita o processo.



- Suponha que um minimizador de f pertence ao intervalo $[a,b]$.

Ideia do algoritmo

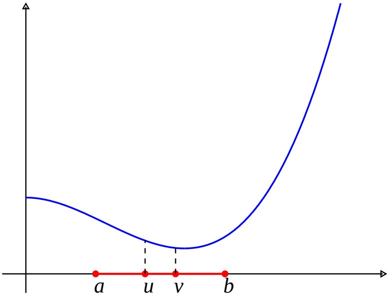
1. $a < u < v < b$.
2. $f(u) < f(v) \Rightarrow$ descarta $[v,b]$.
3. $f(u) \geq f(v) \Rightarrow$ descarta $[a,u]$.
4. Repita o processo.



- Suponha que um minimizador de f pertence ao intervalo $[a, b]$.

Ideia do algoritmo

1. $a < u < v < b$.
2. $f(u) < f(v) \Rightarrow$ descarta $[v, b]$.
3. $f(u) \geq f(v) \Rightarrow$ descarta $[a, u]$.
4. Repita o processo.

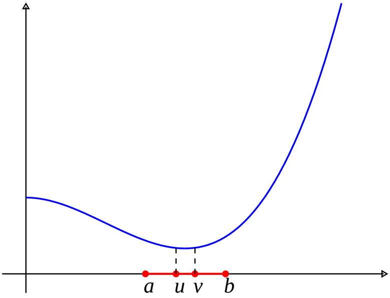


Ideia do algoritmo

- Suponha que um minimizador de f pertence ao intervalo $[a,b]$.

Ideia do algoritmo

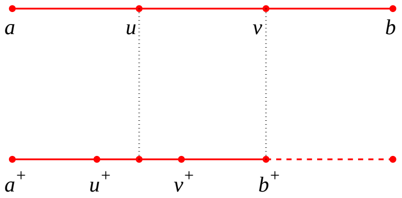
1. $a < u < v < b$.
2. $f(u) < f(v) \Rightarrow$ descarta $[v,b]$.
3. $f(u) \geq f(v) \Rightarrow$ descarta $[a,u]$.
4. Repita o processo.



- Como particionar o intervalo $[a,b]$?

Três partes iguais?

$$u = a + \frac{1}{3}(b-a) \quad \text{e} \quad v = a + \frac{2}{3}(b-a)$$



Partição do intervalo $[a, b]$

Segundo a razão áurea

$$u = a + \theta_1 (b - a) \qquad \text{e} \qquad v = a + \theta_2 (b - a)$$

- $\dfrac{b-u}{b-a} = \dfrac{u-a}{b-u}$ e $\dfrac{v-a}{b-a} = \dfrac{b-v}{v-a}$
- $1 - \theta_1 = \dfrac{\theta_1}{1-\theta_1}$ e $\theta_2 = \dfrac{1-\theta_2}{\theta_2}$
- $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382$ e $\theta_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi \approx 0,618$

Partição do intervalo $[a,b]$

Segundo a razão áurea

$$u = a + \theta_1(b-a) \qquad \text{e} \qquad v = a + \theta_2(b-a)$$

- $\dfrac{b-u}{b-a} = \dfrac{u-a}{b-u}$ e $\dfrac{v-a}{b-a} = \dfrac{b-v}{v-a}$
- $1-\theta_1 = \dfrac{\theta_1}{1-\theta_1}$ e $\theta_2 = \dfrac{1-\theta_2}{\theta_2}$
- $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382$ e $\theta_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi \approx 0,618$

Partição do intervalo $[a, b]$

Segundo a razão áurea

$$u = a + \theta_1 (b - a) \qquad \text{e} \qquad v = a + \theta_2 (b - a)$$

- $\dfrac{b-u}{b-a} = \dfrac{u-a}{b-u}$ e $\dfrac{v-a}{b-a} = \dfrac{b-v}{v-a}$
- $1 - \theta_1 = \dfrac{\theta_1}{1-\theta_1}$ e $\theta_2 = \dfrac{1-\theta_2}{\theta_2}$
- $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382$ e $\theta_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi \approx 0,618$

Partição do intervalo $[a,b]$

Segundo a razão áurea

$$u = a + \theta_1 (b-a) \qquad \text{e} \qquad v = a + \theta_2 (b-a)$$

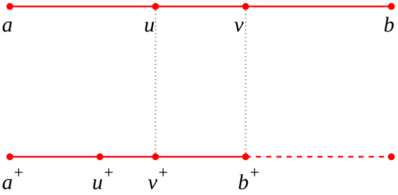
- $\dfrac{b-u}{b-a} = \dfrac{u-a}{b-u}$ e $\dfrac{v-a}{b-a} = \dfrac{b-v}{v-a}$
- $1-\theta_1 = \dfrac{\theta_1}{1-\theta_1}$ e $\theta_2 = \dfrac{1-\theta_2}{\theta_2}$
- $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382$ e $\theta_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi \approx 0,618$

Partição do intervalo $[a,b]$

Lema

Na seção áurea, se $[v,b]$ é descartado então $v^+ = u$.

- $[v,b]$ descartado $\Rightarrow b^+ = v$ e $a^+ = a$.
- $v^+ = a^+ + \theta_2(b^+ - a^+) = a + \theta_2(v-a)$
- $v^+ = a + \theta_2^2(b-a) = a + \theta_1(b-a) = u$

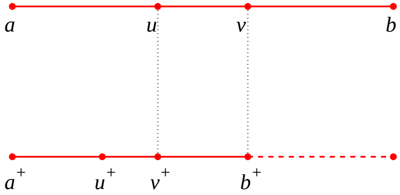


Partição do intervalo $[a, b]$

Lema

Na seção áurea, se $[v, b]$ é descartado então $v^+ = u$.

- $[v, b]$ descartado $\Rightarrow b^+ = v$ e $a^+ = a$.
- $v^+ = a^+ + \theta_2(b^+ - a^+) = a + \theta_2(v - a)$
- $v^+ = a + \theta_2^2(b - a) = a + \theta_1(b - a) = u$

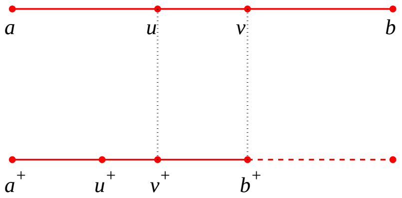


Partição do intervalo $[a,b]$

Lema

Na seção áurea, se $[v,b]$ é descartado então $v^+ = u$.

- $[v,b]$ descartado $\Rightarrow b^+ = v$ e $a^+ = a$.
- $v^+ = a^+ + \theta_2(b^+ - a^+) = a + \theta_2(v - a)$
- $v^+ = a + \theta_2^2(b-a) = a + \theta_1(b-a) = u$

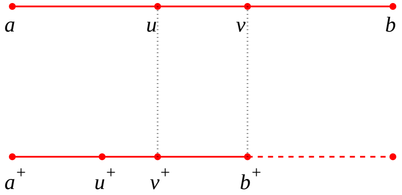


Partição do intervalo $[a,b]$

Lema

Na seção áurea, se $[v,b]$ é descartado então $v^+ = u$.

- $[v,b]$ descartado $\Rightarrow b^+ = v$ e $a^+ = a$.
- $v^+ = a^+ + \theta_2(b^+ - a^+) = a + \theta_2(v - a)$
- $v^+ = a + \theta_2^2(b - a) = a + \theta_1(b - a) = u$



Algoritmo da Seção Áurea

Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

$a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

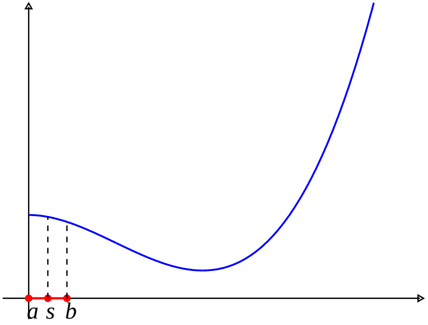
SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

$b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

SENÃO

$a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Algoritmo da Seção Áurea

Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

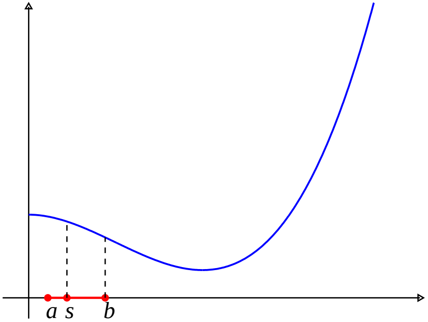
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1-\theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

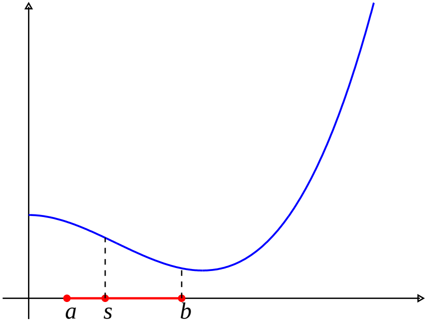
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1-\theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

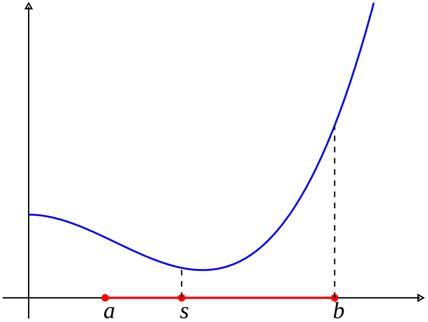
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a, b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a, b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

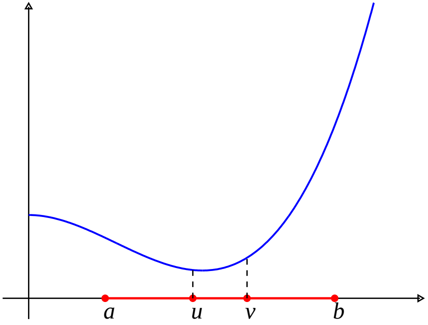
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Algoritmo da Seção Áurea

Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a),\ v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

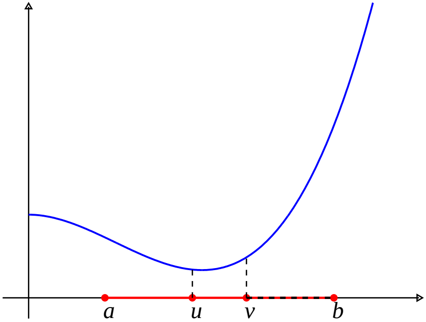
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a, b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a, b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

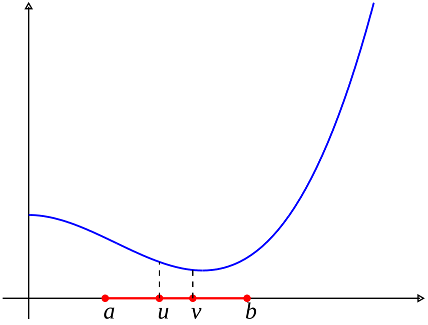
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Algoritmo da Seção Áurea

Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

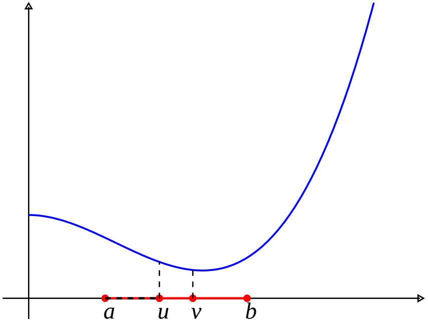
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

$\quad a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

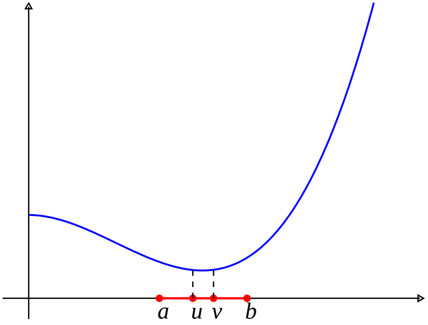
$\quad$ SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

$\quad\quad b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

$\quad$ SENÃO

$\quad\quad a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Algoritmo da Seção Áurea

Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

    $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

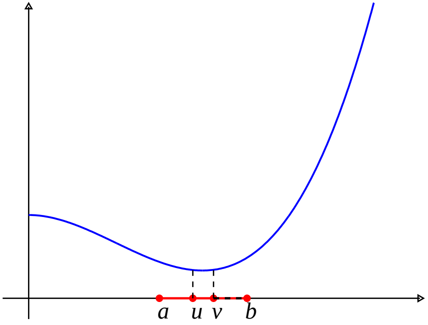
    SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

        $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

    SENÃO

        $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a, b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

$\quad a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a, b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

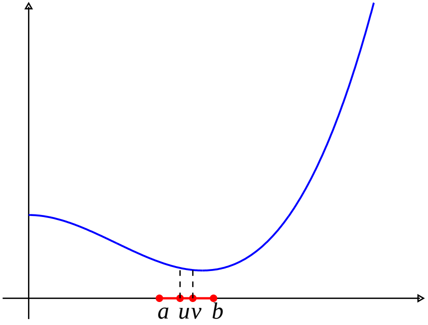
$\quad$ SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

$\qquad b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

$\quad$ SENÃO

$\qquad a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

    $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a),\ v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

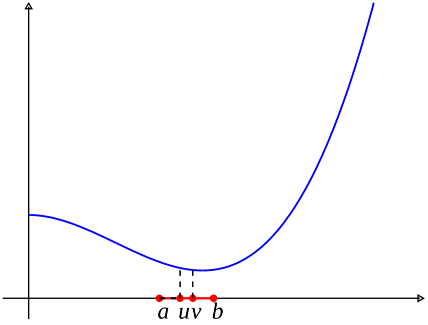
    SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

        $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

    SENÃO

        $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a),\ v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

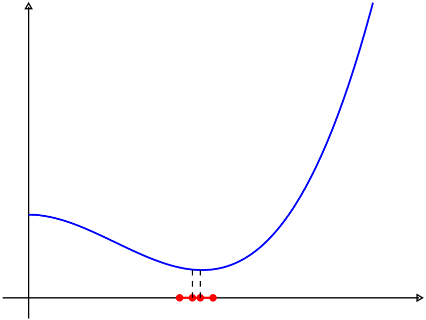
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a, b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a, b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

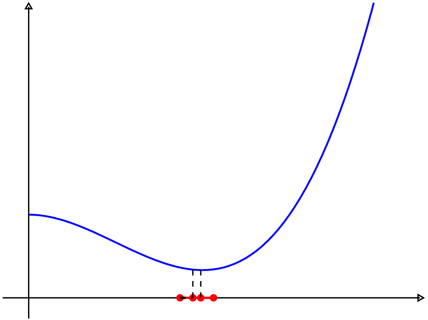
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

   $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

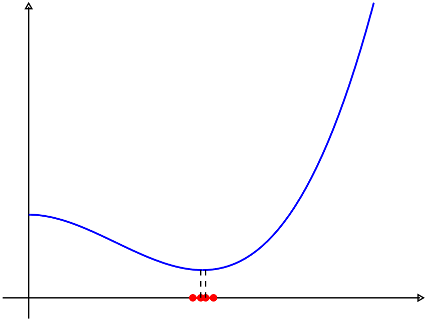
   SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

      $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

   SENÃO

      $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

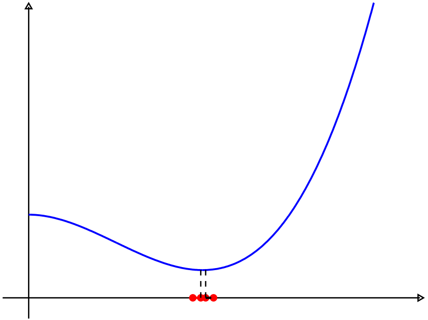
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

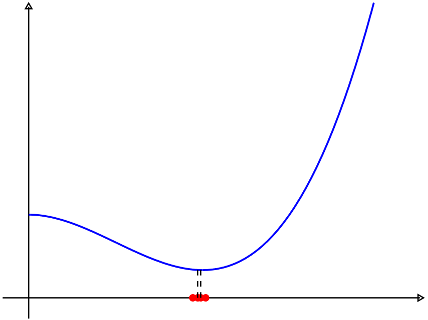
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Algoritmo da Seção Áurea

Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

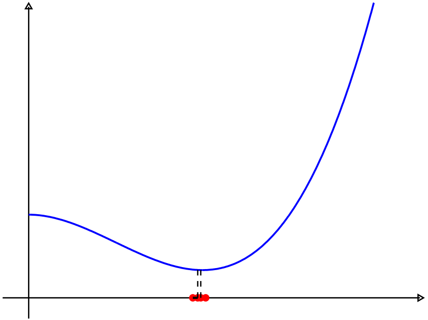
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

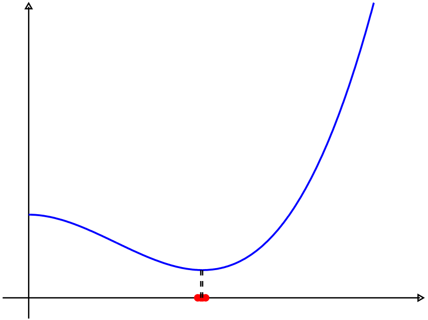
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

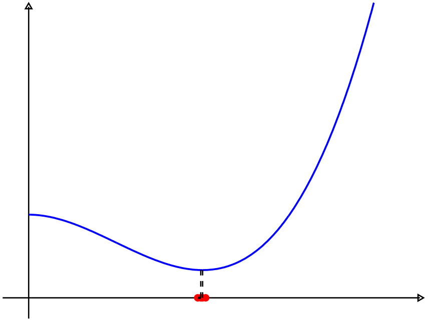
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

$a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

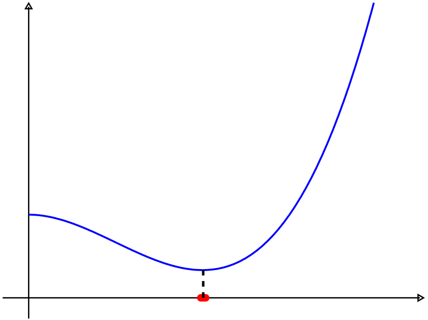
SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

$b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

SENÃO

$a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

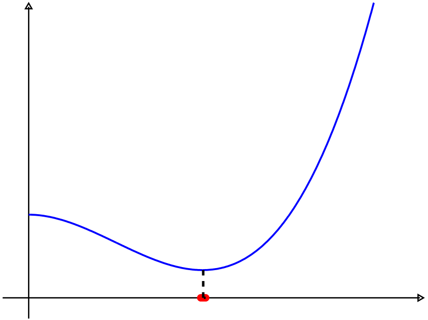
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a, b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

  $a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a, b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

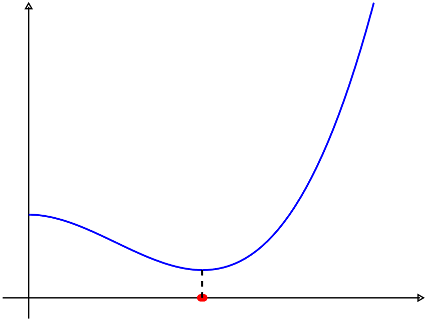
  SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

    $b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

  SENÃO

    $a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



Dados: $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, $\theta_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\theta_2 = 1-\theta_1$

Fase 1: Obtenção do intervalo $[a,b]$

$a = 0$, $s = \rho$ e $b = 2\rho$

REPITA enquanto $\varphi(b) < \varphi(s)$

$a = s$, $s = b$ e $b = 2b$

Fase 2: Obtenção de $\bar{t} \in [a,b]$

$u = a + \theta_1(b-a)$, $v = a + \theta_2(b-a)$

REPITA enquanto $(b-a) > \varepsilon$

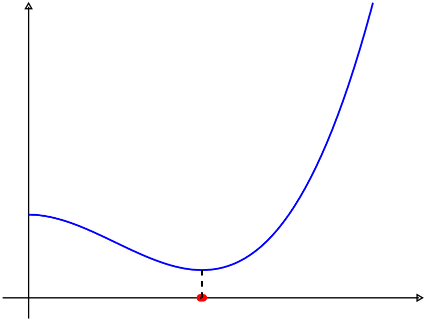
SE $\varphi(u) < \varphi(v)$

$b = v$, $v = u$, $u = a + \theta_1(b-a)$

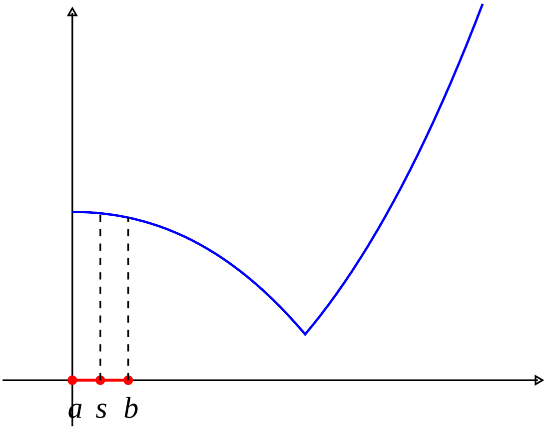
SENÃO

$a = u$, $u = v$, $v = a + \theta_2(b-a)$

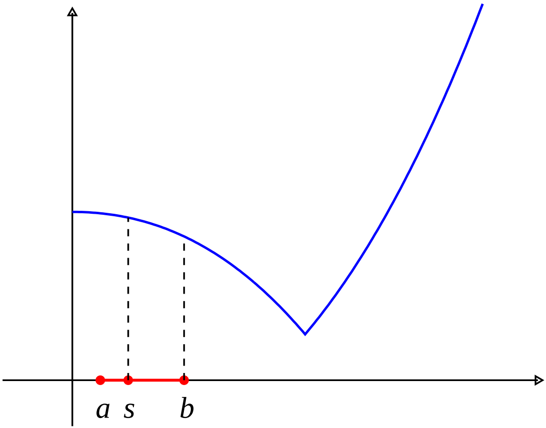
Defina $\bar{t} = \dfrac{u+v}{2}$



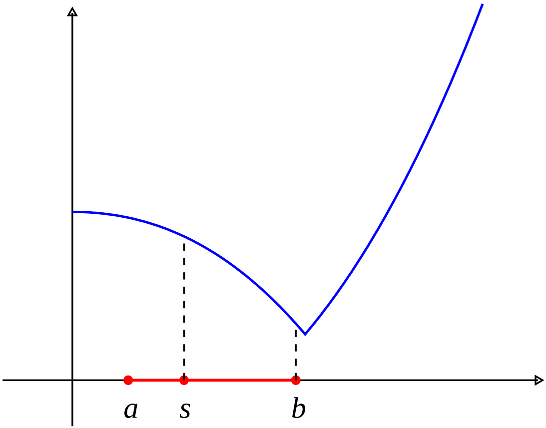
Exemplo - Fase 1



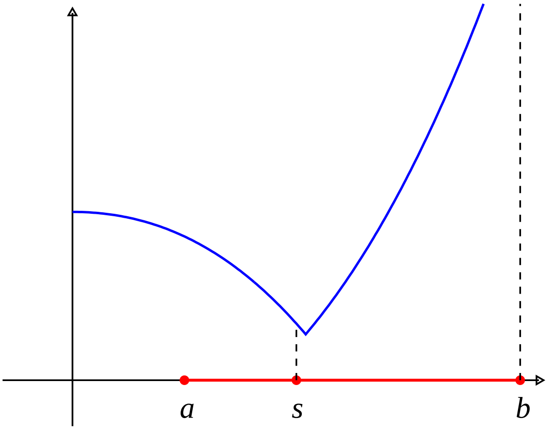
Exemplo - Fase 1



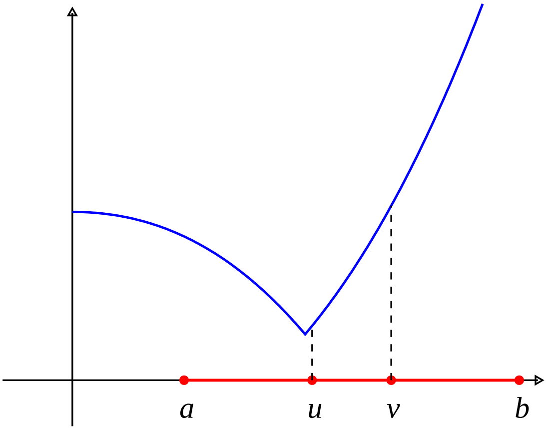
Exemplo - Fase 1



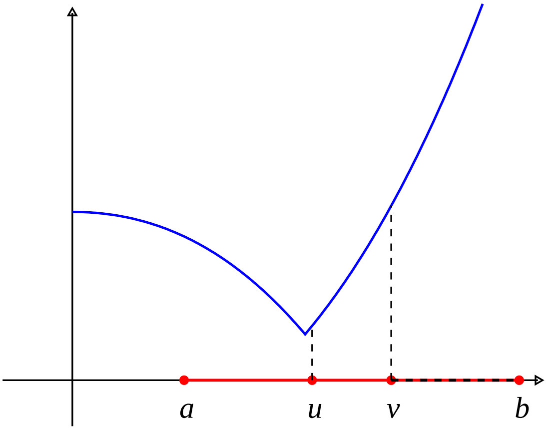
Exemplo - Fase 1



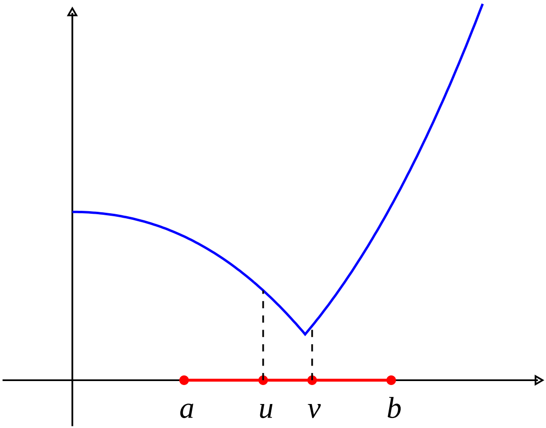
Exemplo - Fase 2



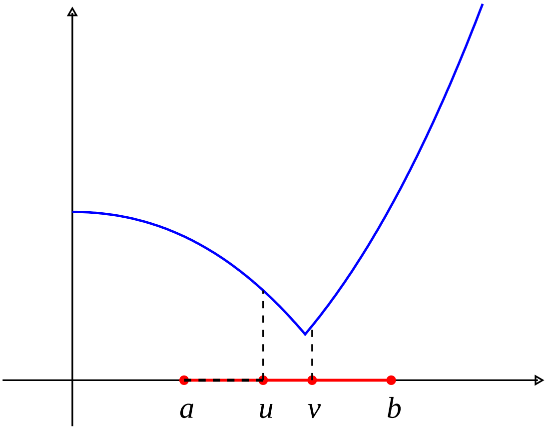
Exemplo - Fase 2



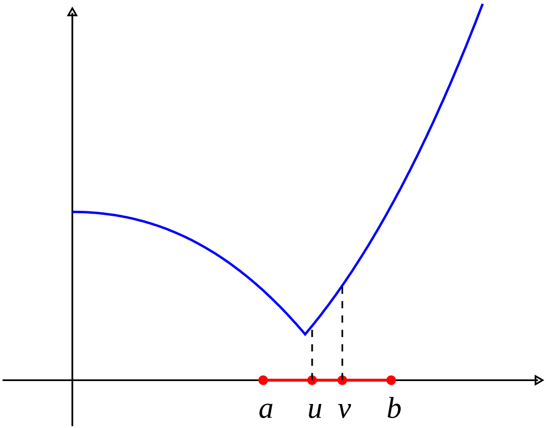
Exemplo - Fase 2



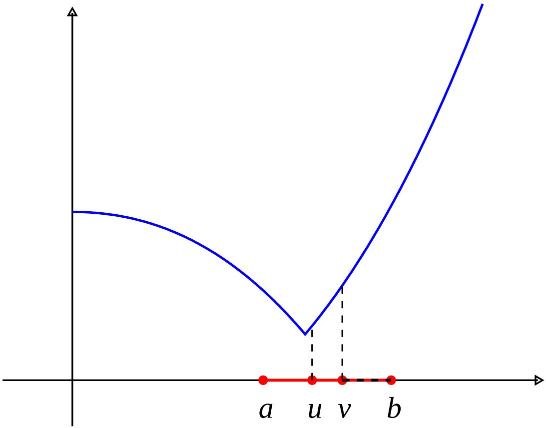
Exemplo - Fase 2



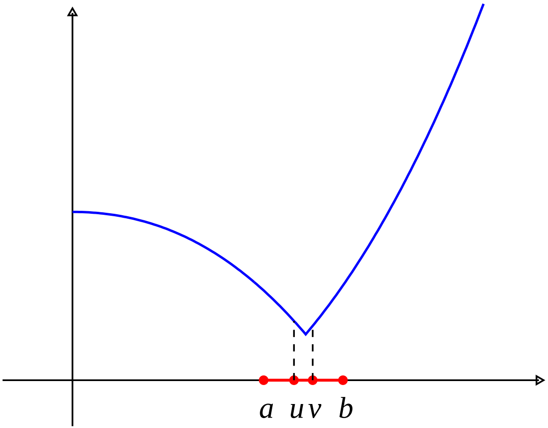
Exemplo - Fase 2



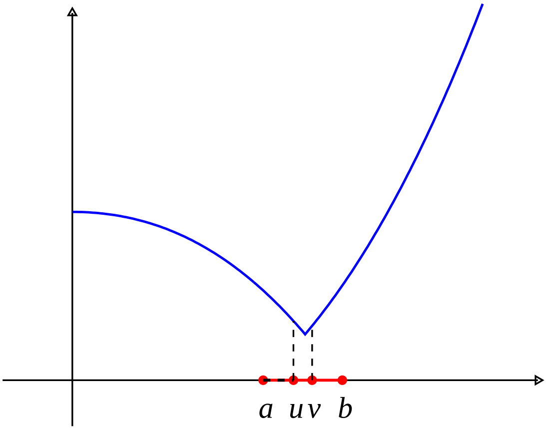
Exemplo - Fase 2



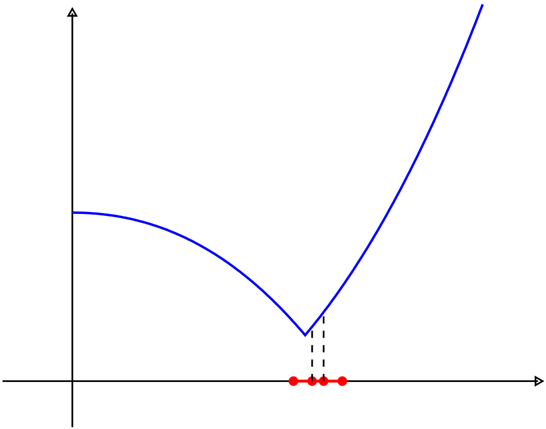
Exemplo - Fase 2



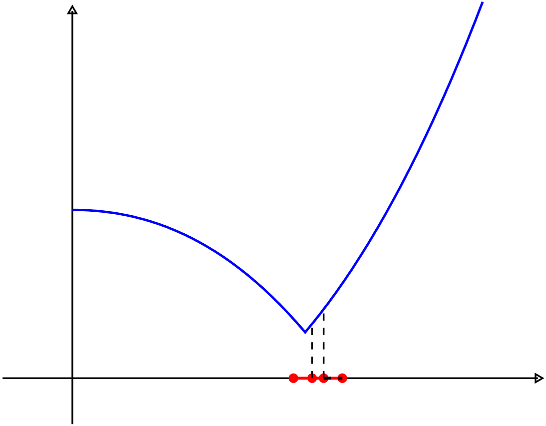
Exemplo - Fase 2



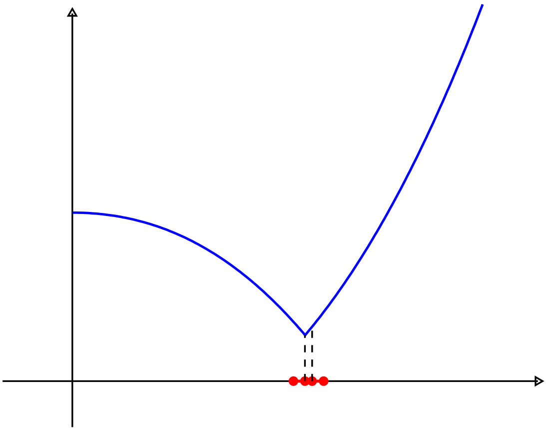
Exemplo - Fase 2



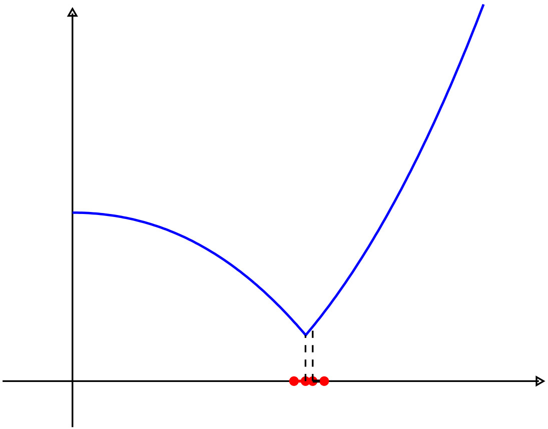
Exemplo - Fase 2



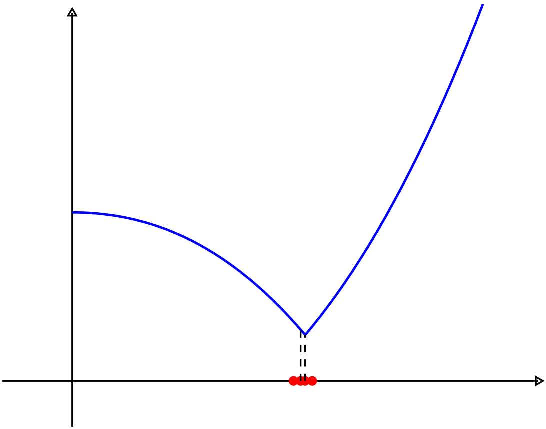
Exemplo - Fase 2

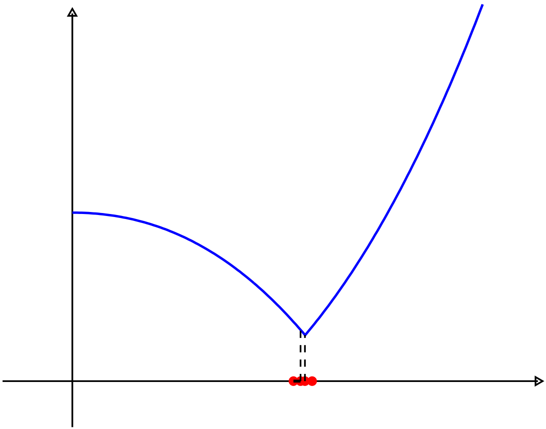


Exemplo - Fase 2

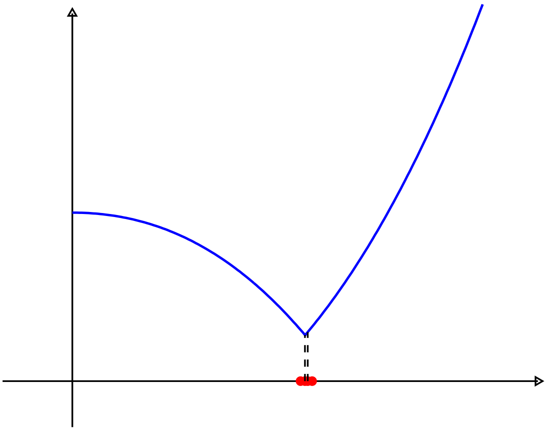


Exemplo - Fase 2

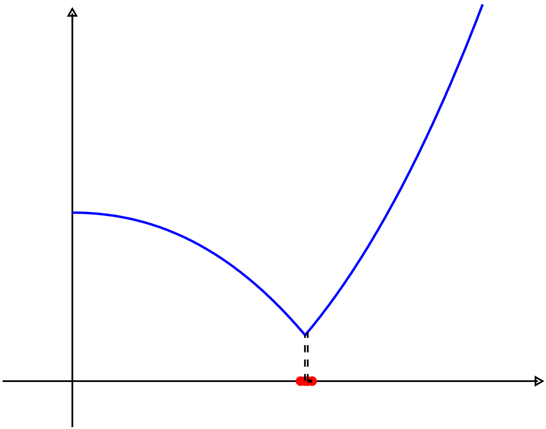




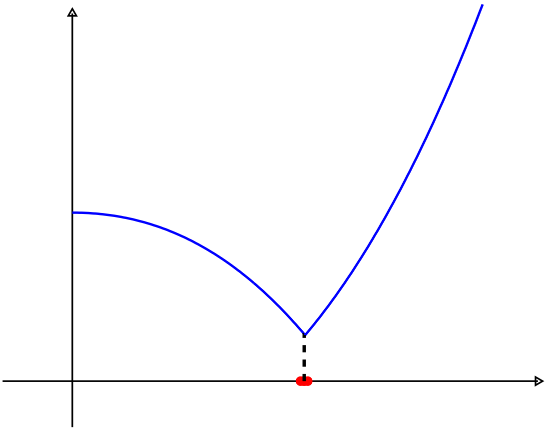
Exemplo - Fase 2



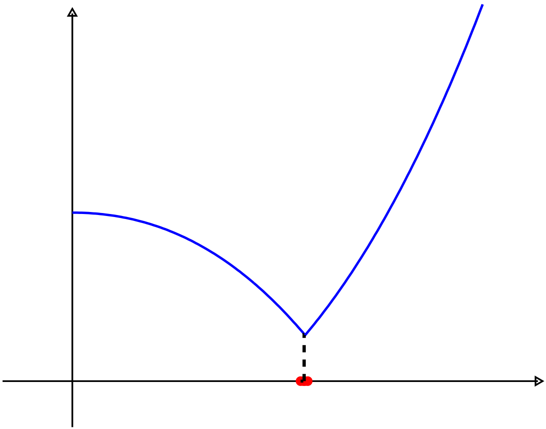
Exemplo - Fase 2



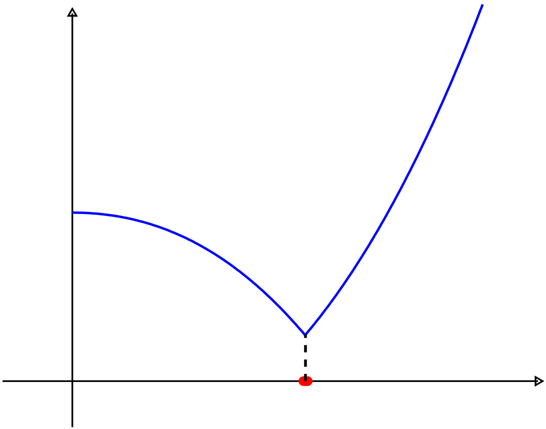
Exemplo - Fase 2



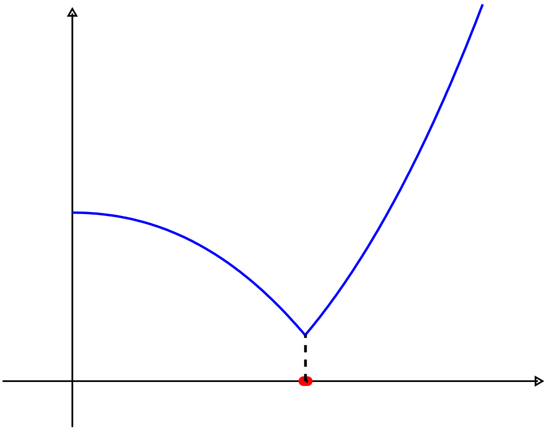
Exemplo - Fase 2



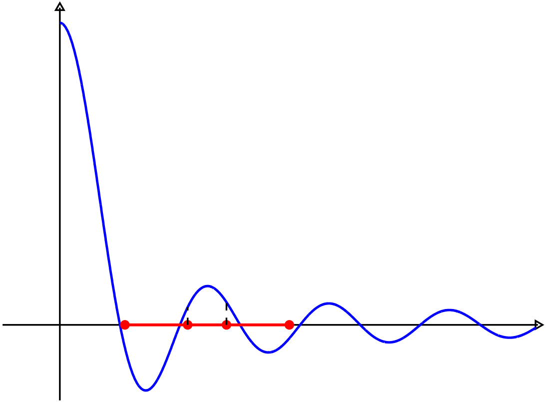
Exemplo - Fase 2



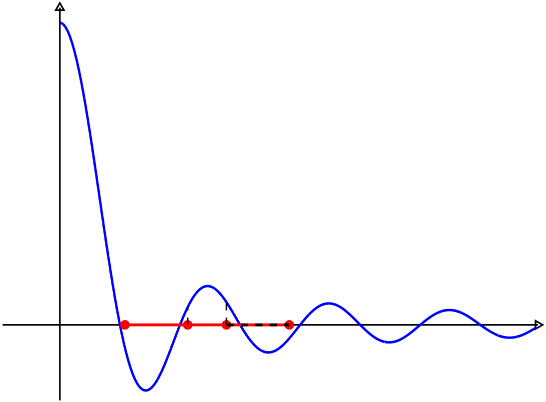
Exemplo - Fase 2



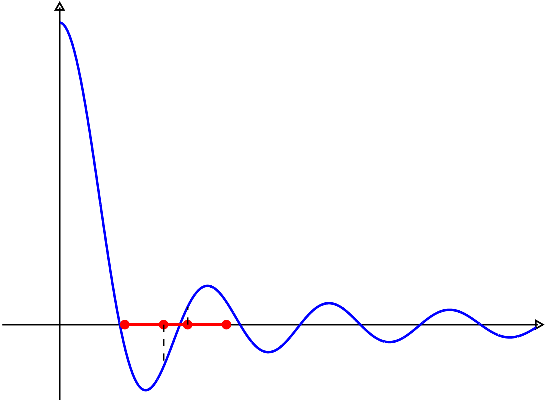
Exemplo - convergência para a solução global



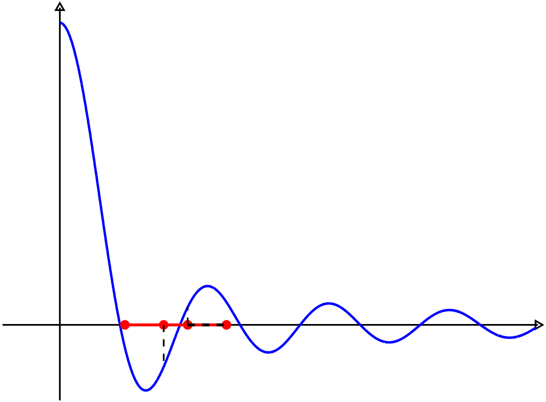
Exemplo - convergência para a solução global



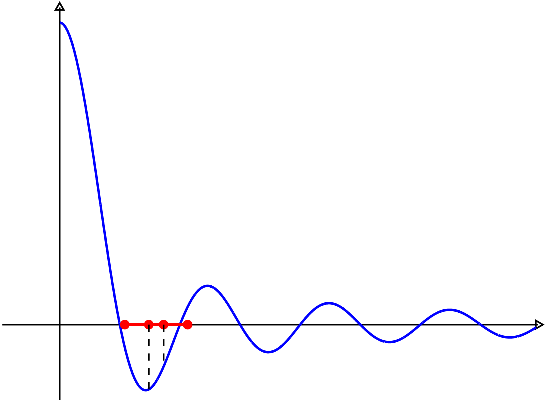
Exemplo - convergência para a solução global



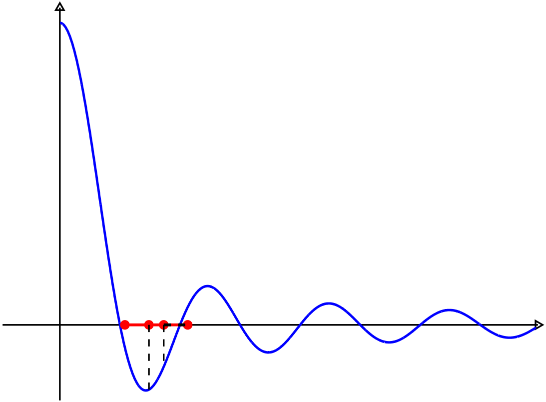
Exemplo - convergência para a solução global



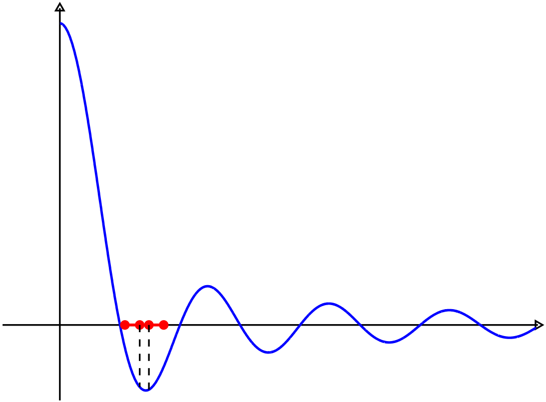
Exemplo - convergência para a solução global



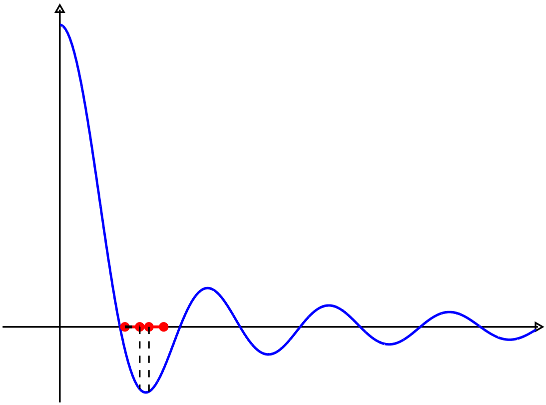
Exemplo - convergência para a solução global



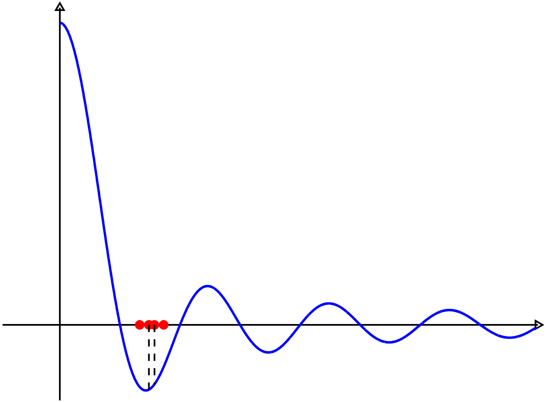
Exemplo - convergência para a solução global



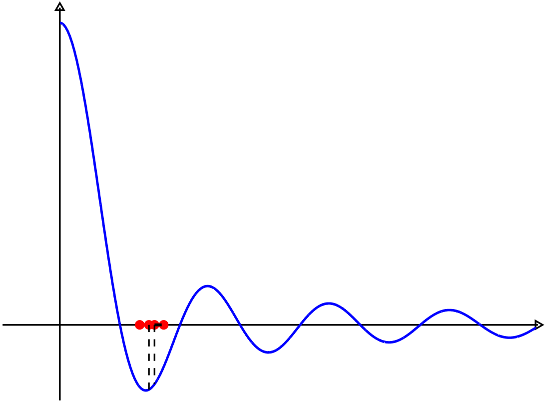
Exemplo - convergência para a solução global



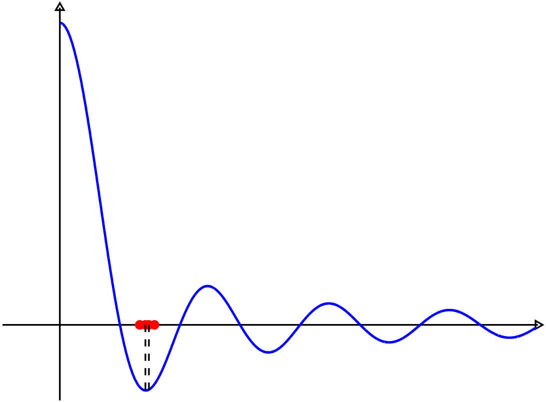
Exemplo - convergência para a solução global



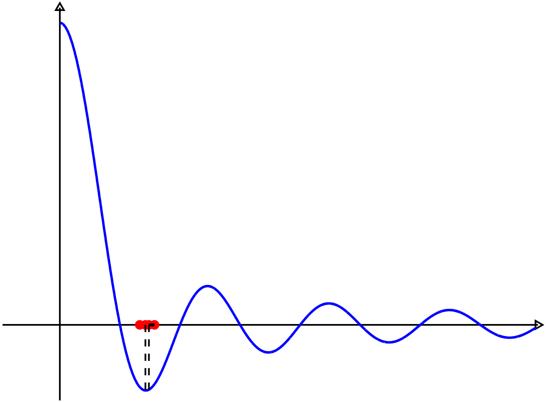
Exemplo - convergência para a solução global



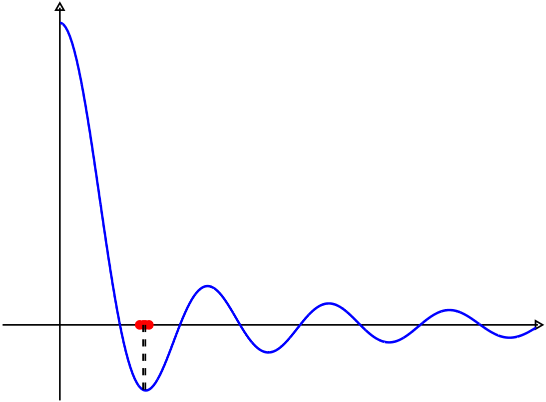
Exemplo - convergência para a solução global



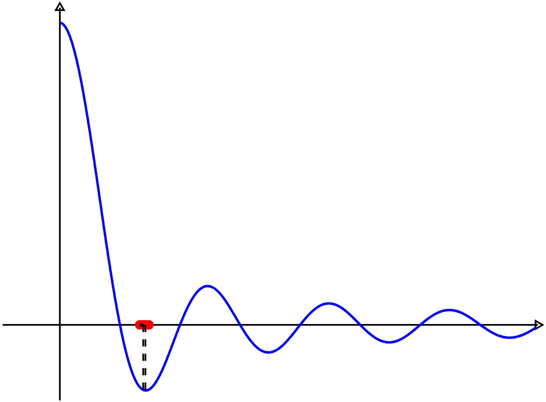
Exemplo - convergência para a solução global



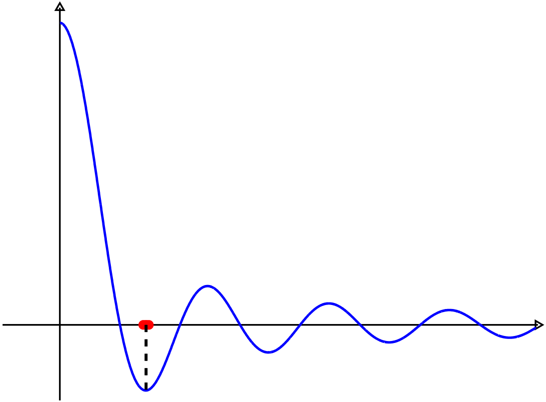
Exemplo - convergência para a solução global



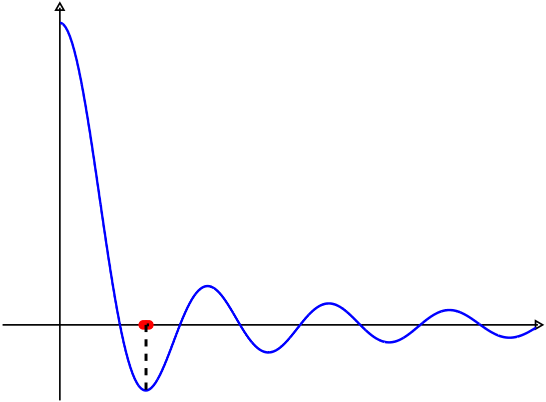
Exemplo - convergência para a solução global



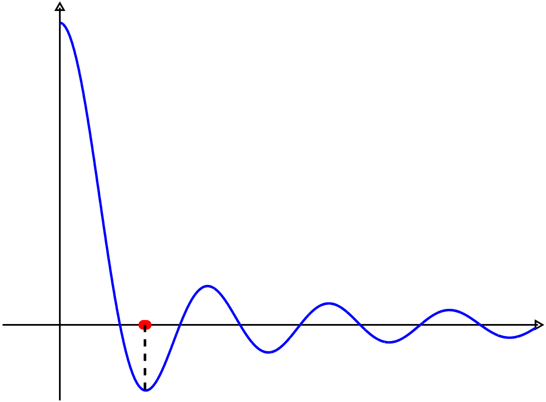
Exemplo - convergência para a solução global



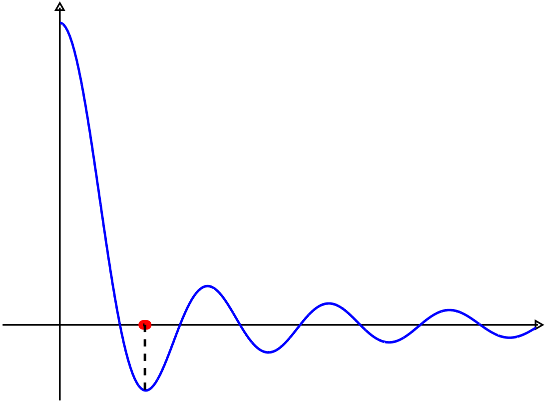
Exemplo - convergência para a solução global



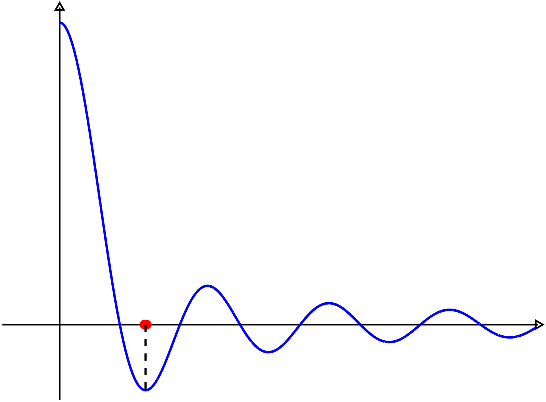
Exemplo - convergência para a solução global



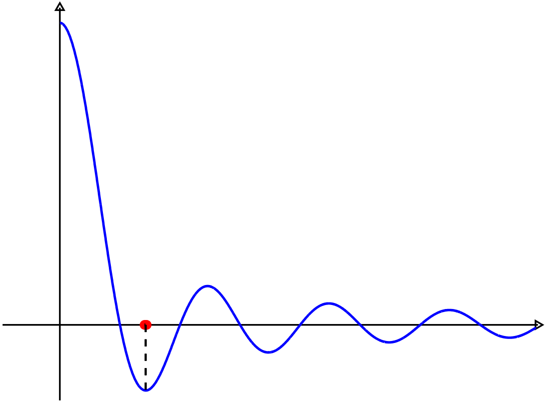
Exemplo - convergência para a solução global



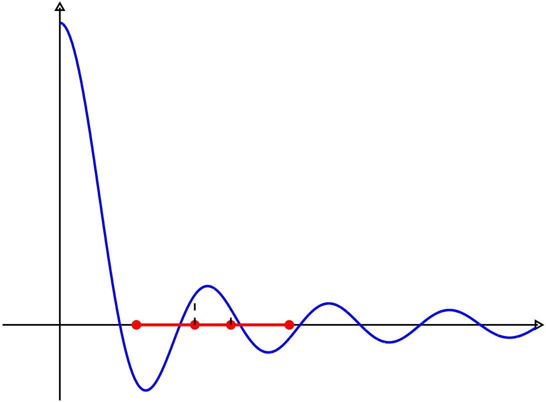
Exemplo - convergência para a solução global



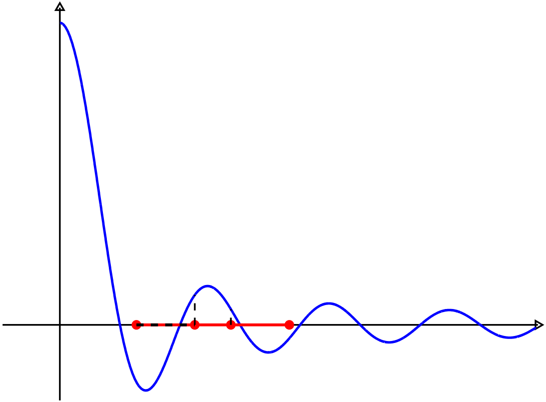
Exemplo - convergência para a solução global



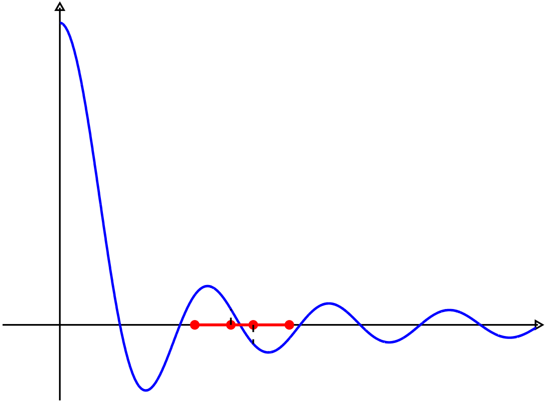
Exemplo - convergência para uma solução local



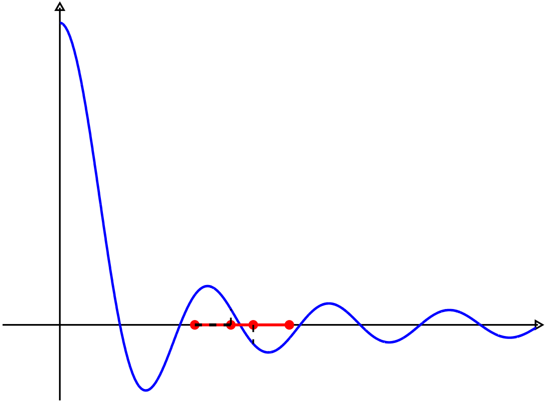
Exemplo - convergência para uma solução local



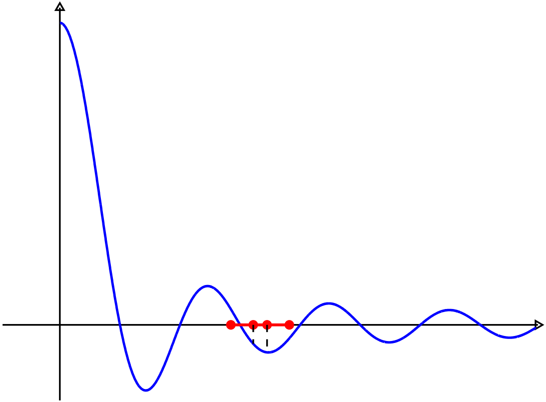
Exemplo - convergência para uma solução local



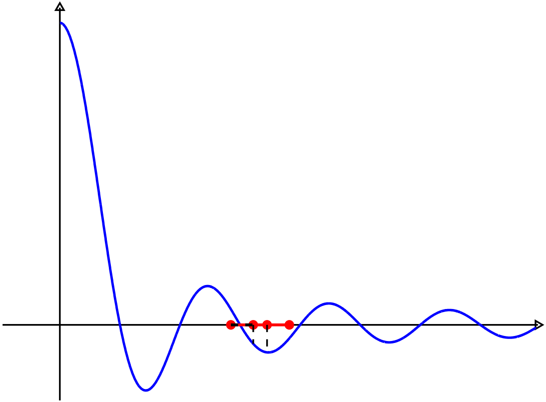
Exemplo - convergência para uma solução local



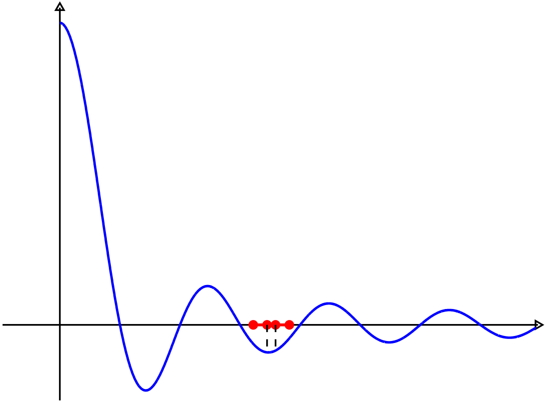
Exemplo - convergência para uma solução local



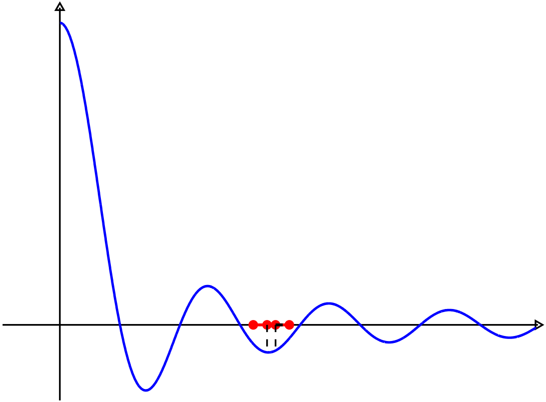
Exemplo - convergência para uma solução local



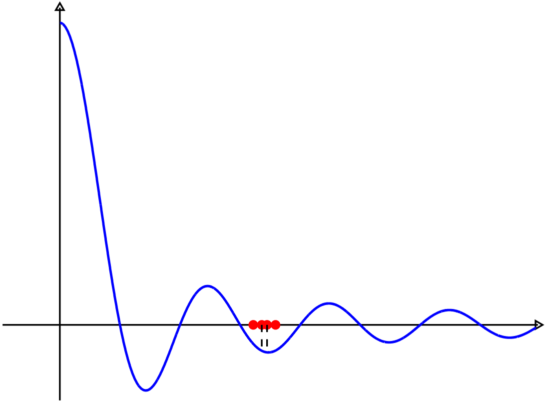
Exemplo - convergência para uma solução local



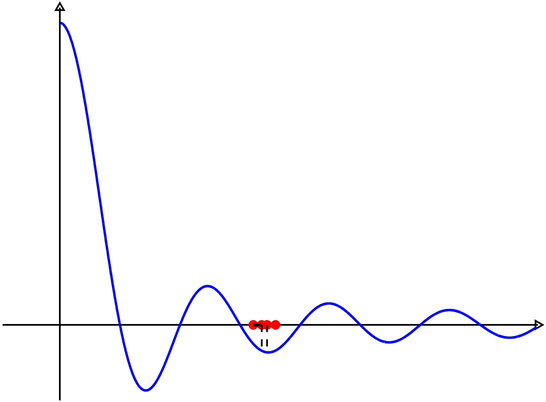
Exemplo - convergência para uma solução local



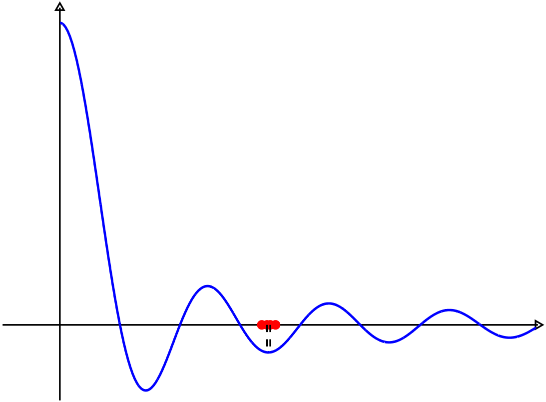
Exemplo - convergência para uma solução local



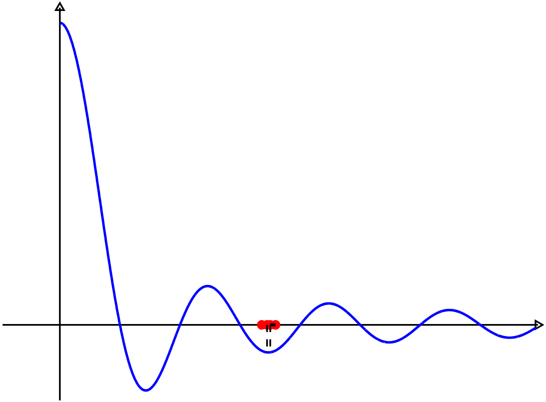
Exemplo - convergência para uma solução local



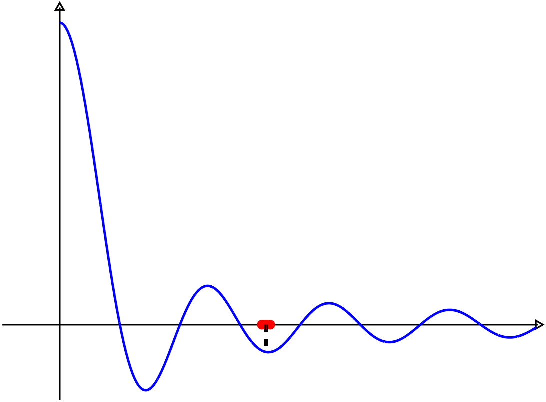
Exemplo - convergência para uma solução local



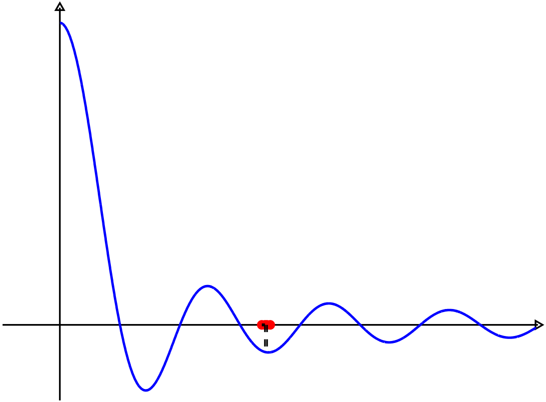
Exemplo - convergência para uma solução local



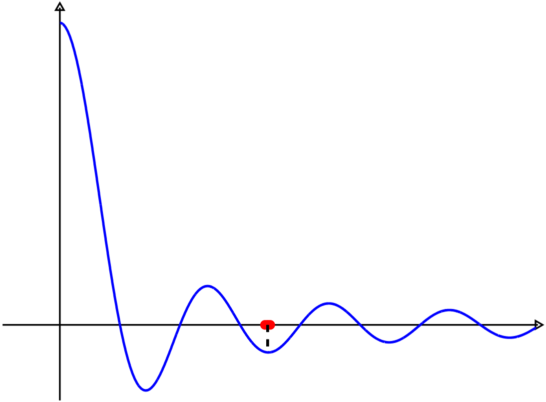
Exemplo - convergência para uma solução local



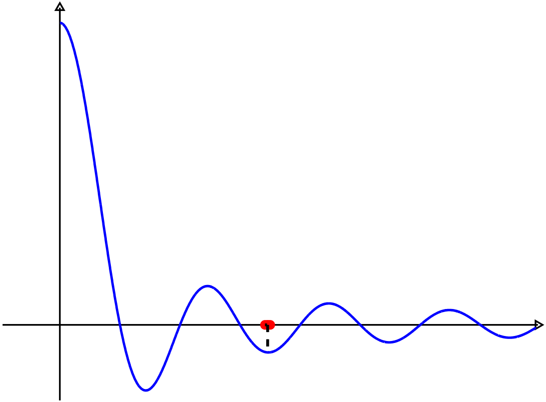
Exemplo - convergência para uma solução local



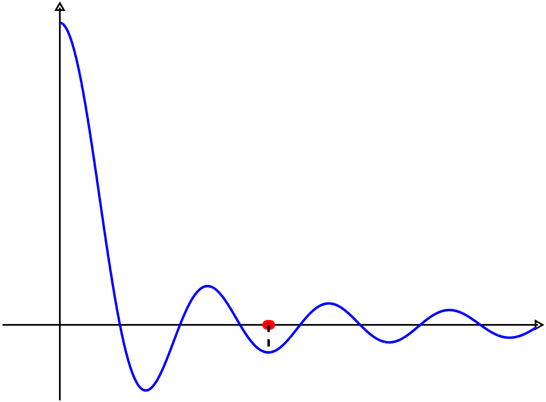
Exemplo - convergência para uma solução local



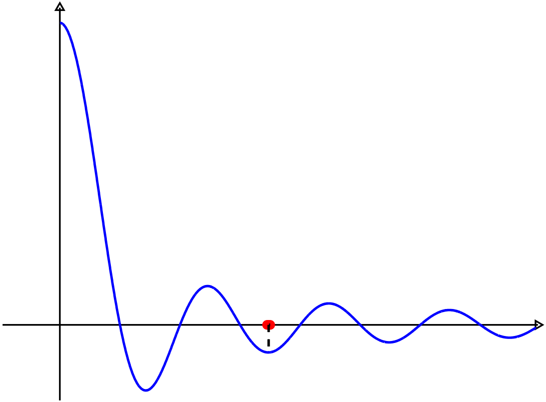
Exemplo - convergência para uma solução local



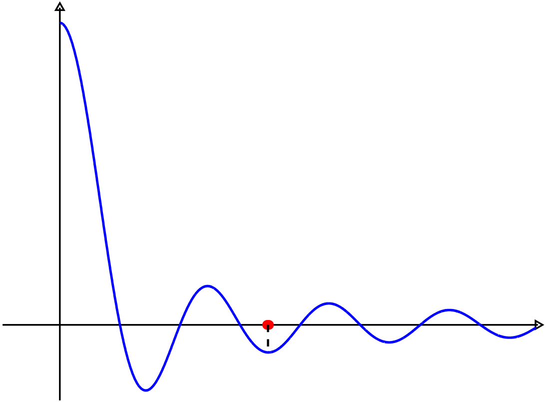
Exemplo - convergência para uma solução local



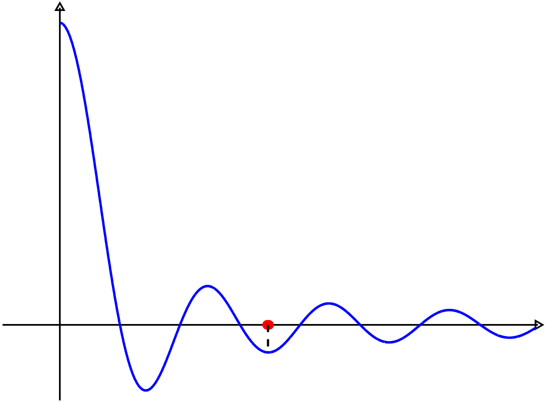
Exemplo - convergência para uma solução local



Exemplo - convergência para uma solução local



Exemplo - convergência para uma solução local

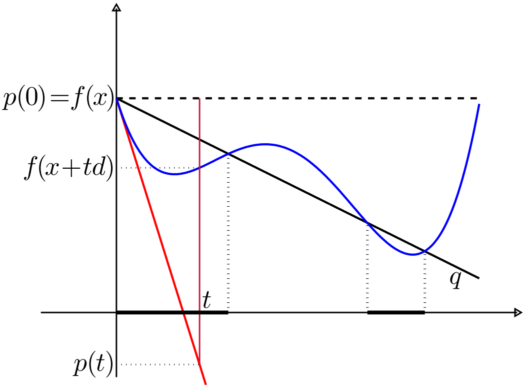


Busca inexata - condição de Armijo

Redução suficiente sem tentar minimizar a função ao longo da direção.

Dados $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$ e $\eta \in (0,1)$. A regra de Armijo encontra $\bar{t} > 0$ tal que

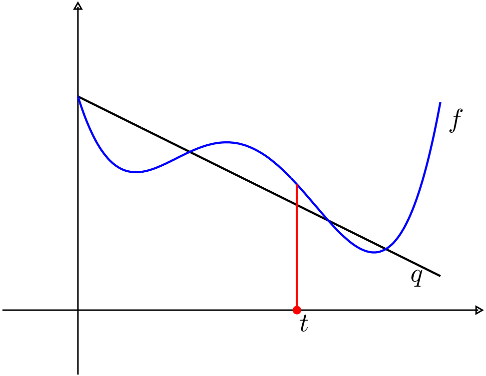
$$f(\bar{x} + \bar{t}d) \leq f(\bar{x}) + \eta \bar{t} \nabla f(\bar{x})^T d.$$



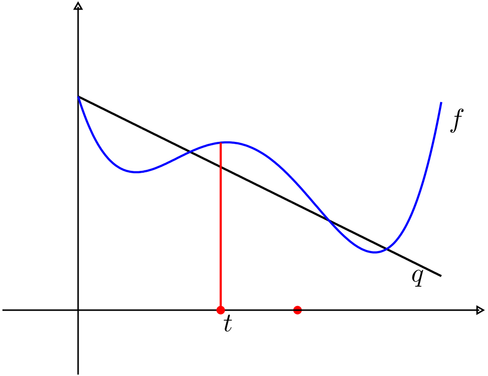
- $p(t) = f(\bar{x}) + t \nabla f(\bar{x})^T d$
- $q(t) = f(\bar{x}) + \eta t \nabla f(\bar{x})^T d$

Algoritmo - Busca de Armijo

Dados: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$ (direção de descida), $\gamma, \eta \in (0,1)$
$t = 1$
REPITA enquanto $f(\bar{x}+td) > f(\bar{x}) + \eta t \nabla f(\bar{x})^T d$
$\quad t = \gamma t$



Dados: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$ (direção de descida), $\gamma, \eta \in (0,1)$
$t = 1$
REPITA enquanto $f(\bar{x}+td) > f(\bar{x}) + \eta t \nabla f(\bar{x})^T d$
  $t = \gamma t$



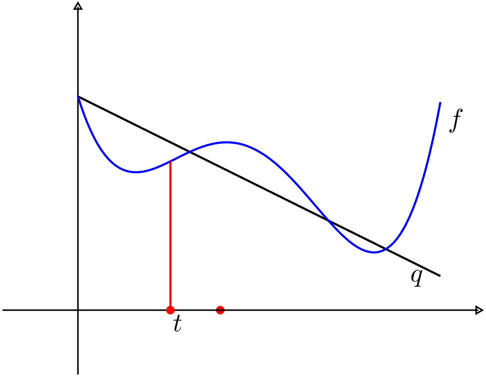
Algoritmo - Busca de Armijo

Dados: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$ (direção de descida), $\gamma, \eta \in (0,1)$

$t = 1$

REPITA enquanto $f(\bar{x} + td) > f(\bar{x}) + \eta t \nabla f(\bar{x})^T d$

$\quad t = \gamma t$



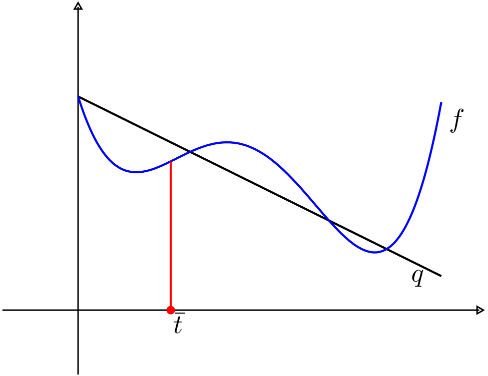
Algoritmo - Busca de Armijo

Dados: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$ (direção de descida), $\gamma, \eta \in (0,1)$

$t = 1$

REPITA enquanto $f(\bar{x} + td) > f(\bar{x}) + \eta t \nabla f(\bar{x})^T d$

$\quad t = \gamma t$



Busca de Armijo

Considere $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Faça uma busca de Armijo a partir de $\bar{x}$, na direção d. Utilize $\eta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = 0,8$.

- d é uma direção de descida, pois $\nabla f(\bar{x})^T d = (-1 \ \ -2)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 < 0$.
- Começando com $t = 1$, o passo é recusado, pois

$$f(\bar{x} + td) > f(\bar{x}) + \eta t \nabla f(\bar{x})^T d.$$

- Fazemos $t = 0,8 \times 1$, que também é recusado.
- Fazendo $t = 0,8 \times 0,8 = 0,64$, teremos o passo aceito. Assim,

$$\bar{t} = 0,64 \quad \text{e} \quad \bar{x} + \bar{t}d = \begin{pmatrix} 2,92 \\ 0,64 \end{pmatrix}.$$

CENGAGE Learning

Considere $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Faça uma busca de Armijo a partir de $\bar{x}$, na direção d. Utilize $\eta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = 0,8$.

- d é uma direção de descida, pois $\nabla f(\bar{x})^T d = (-1 \;\; -2)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 < 0$.
- Começando com $t = 1$, o passo é recusado, pois

$$f(\bar{x} + td) > f(\bar{x}) + \eta t \nabla f(\bar{x})^T d.$$

- Fazemos $t = 0,8 \times 1$, que também é recusado.
- Fazendo $t = 0,8 \times 0,8 = 0,64$, teremos o passo aceito. Assim,

$$\bar{t} = 0,64 \quad \text{e} \quad \bar{x} + \bar{t}d = \begin{pmatrix} 2,92 \\ 0,64 \end{pmatrix}.$$

Busca de Armijo

Considere $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Faça uma busca de Armijo a partir de $\bar{x}$, na direção d. Utilize $\eta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = 0,8$.

- d é uma direção de descida, pois $\nabla f(\bar{x})^T d = \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 < 0$.
- Começando com $t = 1$, o passo é recusado, pois

$$f(\bar{x} + td) > f(\bar{x}) + \eta t \nabla f(\bar{x})^T d.$$

- Fazemos $t = 0,8 \times 1$, que também é recusado.
- Fazendo $t = 0,8 \times 0,8 = 0,64$, teremos o passo aceito. Assim,

$$\bar{t} = 0,64 \quad \text{e} \quad \bar{x} + \bar{t}d = \begin{pmatrix} 2,92 \\ 0,64 \end{pmatrix}.$$

Busca de Armijo

Considere $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Faça uma busca de Armijo a partir de $\bar{x}$, na direção d. Utilize $\eta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = 0,8$.

- d é uma direção de descida, pois $\nabla f(\bar{x})^T d = (-1 \;\; -2) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 < 0$.
- Começando com $t = 1$, o passo é recusado, pois

$$f(\bar{x} + td) > f(\bar{x}) + \eta t \nabla f(\bar{x})^T d.$$

- Fazemos $t = 0,8 \times 1$, que também é recusado.
- Fazendo $t = 0,8 \times 0,8 = 0,64$, teremos o passo aceito. Assim,

$$\bar{t} = 0,64 \quad \text{e} \quad \bar{x} + \bar{t}d = \begin{pmatrix} 2,92 \\ 0,64 \end{pmatrix}.$$

Busca de Armijo

Considere $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Faça uma busca de Armijo a partir de $\bar{x}$, na direção d. Utilize $\eta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = 0,8$.

- d é uma direção de descida, pois $\nabla f(\bar{x})^T d = (-1 \;\; -2) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 < 0$.
- Começando com $t = 1$, o passo é recusado, pois

$$f(\bar{x} + td) > f(\bar{x}) + \eta t \nabla f(\bar{x})^T d.$$

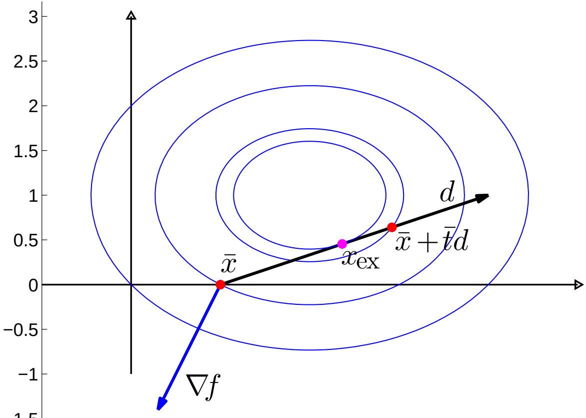
- Fazemos $t = 0,8 \times 1$, que também é recusado.
- Fazendo $t = 0,8 \times 0,8 = 0,64$, teremos o passo aceito. Assim,

$$\bar{t} = 0,64 \quad \text{e} \quad \bar{x} + \bar{t}d = \begin{pmatrix} 2,92 \\ 0,64 \end{pmatrix}.$$

CENGAGE Learning

Considere $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Faça uma busca de Armijo a partir de $\bar{x}$, na direção d. Utilize $\eta = \frac{1}{4}$ e $\gamma = 0,8$.



Escolha de uma direção de descida

- Seja $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $x \mapsto H(x)$ definida positiva.
- Se $\nabla f(x) \neq 0$, $d = -H(x)\nabla f(x)$ é uma direção de descida.
- Algoritmo.

Dado: $x^0 \in \mathbb{R}^n$
$k = 0$
REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$
    Calcule d^k tal que $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$
    Escolha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$
    Faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$
    $k = k + 1$

Escolha de uma direção de descida

- Seja $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $x \mapsto H(x)$ definida positiva.
- Se $\nabla f(x) \neq 0$, $d = -H(x)\nabla f(x)$ é uma direção de descida.
- Algoritmo.

Dado: $x^0 \in \mathbb{R}^n$
$k = 0$
REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$
    Calcule d^k tal que $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$
    Escolha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$
    Faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$
    $k = k + 1$

Escolha de uma direção de descida

- Seja $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $x \mapsto H(x)$ definida positiva.
- Se $\nabla f(x) \neq 0$, $d = -H(x)\nabla f(x)$ é uma direção de descida.
- Algoritmo.

Dado: $x^0 \in \mathbb{R}^n$
$k = 0$
REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$
    Calcule d^k tal que $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$
    Escolha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$
    Faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$
    $k = k + 1$

Escolha de uma direção de descida

- Seja $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ definida por $x \mapsto H(x)$ definida positiva.
- Se $\nabla f(x) \neq 0$, $d = -H(x)\nabla f(x)$ é uma direção de descida.
- Algoritmo.

Dado: $x^0 \in \mathbb{R}^n$
$k = 0$
REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$
  Calcule d^k tal que $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$
  Escolha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$
  Faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$
  $k = k + 1$

Escolha de uma direção de descida

- Seja $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $x \mapsto H(x)$ definida positiva.
- Se $\nabla f(x) \neq 0$, $d = -H(x)\nabla f(x)$ é uma direção de descida.
- Algoritmo.

Dado: $x^0 \in \mathbb{R}^n$
$k = 0$
REPITA enquanto $\nabla f(x^k) \neq 0$
    $d^k = -H(x^k)\nabla f(x^k)$
    Escolha $t_k > 0$ tal que $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$
    Faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$
    $k = k+1$

Algoritmo globalmente convergente

Definicao

Um algoritmo é globalmente convergente quando para qualquer sequência (x^k) gerada pelo algoritmo e qualquer ponto de acumulação $\bar{x}$ de (x^k), temos que $\bar{x}$ é estacionário.

Suponha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

Teorema

O algoritmo anterior com o tamanho do passo calculado pela busca exata é globalmente convergente.

Algoritmo globalmente convergente

Definicao

Um algoritmo é globalmente convergente quando para qualquer sequência (x^k) gerada pelo algoritmo e qualquer ponto de acumulação $\bar{x}$ de (x^k), temos que $\bar{x}$ é estacionário.

Suponha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

Teorema

O algoritmo anterior com o tamanho do passo calculado pela busca exata é globalmente convergente.

Definicao

Um algoritmo é globalmente convergente quando para qualquer sequência (x^k) gerada pelo algoritmo e qualquer ponto de acumulação $\bar{x}$ de (x^k), temos que $\bar{x}$ é estacionário.

Suponha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

Teorema

O algoritmo anterior com o tamanho do passo calculado pela busca exata é globalmente convergente.

Algoritmo globalmente convergente

Definicao

Um algoritmo é globalmente convergente quando para qualquer sequência (x^k) gerada pelo algoritmo e qualquer ponto de acumulação $\bar{x}$ de (x^k), temos que $\bar{x}$ é estacionário.

Suponha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

Teorema

O algoritmo anterior com o tamanho do passo calculado pela busca de Armijo é globalmente convergente.

Principais referências

A. Friedlander.
Elementos de Programação Não-Linear.
Unicamp, 1994.

D. G. Luenberger.
Linear and Nonlinear Programming.
Addison - Wesley Publishing Company, New York, 1986.

J. Nocedal and S. J. Wright.
Numerical Optimization.
Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, 1999.