PPGM - Otimização I - Primeira avaliação - 12/04/2018

Questões:

1. Considere o problema de minimização irrestrita da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = -x_1(x_2 + 1)^2.$$

   (a) Determine todos os pontos críticos de f.

   (b) Pelas condições de otimalidade de segunda ordem, o que se pode afirmar a respeito destes pontos?

   (c) Use a expressão da função para classificá-los em maximizadores, minimizadores ou pontos de sela.

2. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Mostre que se a Hessiana de f é semidefinida positiva para todo $x \in C$, então f é convexa em C.

3. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado. Dado $z \notin S$, mostre que existem $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a^T z > b \qquad \text{e} \qquad a^T x < b \quad \text{para todo } x \in S.$$

   Dizemos neste caso que a variedade $H = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\right\}$ separa estritamente z de S. Faça uma figura ilustrativa do resultado em $\mathbb{R}^2$. Faça uma figura, em $\mathbb{R}^2$, que elucide a importância da hipótese de convexidade.

4. Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz definida positiva, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c.$$

   Pede-se:

   (a) Mostre que a busca exata na direção $d \in \mathbb{R}^n$, a partir de $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, fornece

$$t^* = -\frac{\nabla f(\bar{x})^T d}{d^T Ad}.$$

   (b) Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ um ponto tal que o vetor $v = \nabla f(\bar{x})$ é um autovetor de A. Mostre que a busca exata na direção $d = -v$, a partir de $\bar{x}$, encontra o minimizador global de f.

5. Considere a classe $\mathcal{F}$ de funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciáveis com gradiente Lipschitz. Sabe-se que se $f \in \mathcal{F}$, então existe $L > 0$ tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x)^T(y - x)| \leq \frac{L}{2}\|y - x\|^2.$$

   (a) Considere $f \in \mathcal{F}$. Dado $x^0 \in \mathbb{R}^n$, seja $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ a sequência definida por:

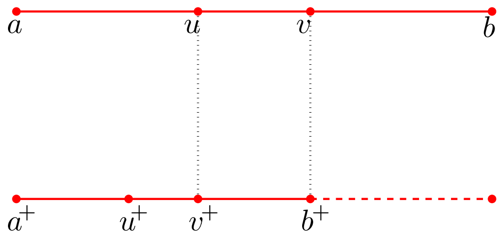
$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{L}\nabla f(x^k).$$

Prove que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$f(x^{k+1}) \leq \; f(x^k) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(x^k)\|^2.$$

(b) Use o item anterior para mostrar que o algoritmo que gera a sequência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ é globalmente convergente, para funções da classe $\mathcal{F}$ limitadas inferiormente.

6. Considere uma iteração do método da seção áurea de busca unidirecional, na qual o intervalo $[v, b]$ foi descartado, como ilustrado na figura abaixo.



Lembre-se que $v = a + \theta(b - a)$ com $\theta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Considere a função $g : [a, v] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \frac{v - t}{b - t}.$$

Pede-se:

(a) Mostre que g é decrescente em seu domínio.

(b) Mostre que dado $t^* \in [a, v]$,

$$\frac{|b^+ - t^*|}{|b - t^*|} \leq \theta.$$

(c) Com base no item anterior, o que pode-se afirmar sobre a taxa de convergência do método da seção áurea?

7. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Sejam $d \in \mathbb{R}^n$ uma direção de descida para f a partir de $\bar{x}$ e $\eta \in (0, 1)$. Prove que existe $\delta > 0$ tal que

$$f(\bar{x} + td) \leq f(\bar{x}) + \eta t \nabla f(\bar{x})^T d,$$

para todo $t \in [0, \delta)$. Faça uma figura elucidativa sobre a desigualdade acima.