PPGM - Otimização I - Segunda avaliação - 18/05/2018

1. (15 pontos) Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e a sequência (x^k) obtida pelo método do gradiente com busca exata para minimizar f a partir de $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Pede-se:

   (a) Prove que os gradientes calculados em dois iterandos consecutivos são ortogonais.

   (b) Prove que $(x^{k+2} - x^k)$ é uma direção de descida a partir de x^k, para todo $k \geq 0$.

   (c) Faça uma figura elucidativa dos resultados dos itens anteriores para uma função definida em $\mathbb{R}^2$.

2. (15 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + 5x_2^2 - 5x_1 + 20x_2$. Iniciando o método do gradiente a partir de $x^0 = (1,1)^T$, quantas iterações garantem que a distância ao minimizador é inferior a 10^{-6}?

3. (25 pontos) Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e suponha que existem $0 < m \leq M$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, as matrizes $\nabla^2 f(x) - mI$ e $MI - \nabla^2 f(x)$ sejam semidefinidas positivas. Suponha que x^* é o único minimizador global de f. Pede-se:

   (a) Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) - f(x^*) \geq \frac{m}{2}\|x - x^*\|^2$.

   (b) Sabendo-se que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,
   $$f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{M}{2}\|x - y\|^2,$$
   prove que se (x^k) é uma sequência gerada pelo método de Newton com passo constante $\alpha_k = \frac{m}{M}$, então, para todo $k \in \mathbb{N}$,
   $$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{m}{2M}\nabla f(x^k)^T (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k).$$

   (c) Use o item anterior para provar que $\lim_{k\to\infty} \|\nabla f(x^k)\| = 0$.

   (d) Prove que a sequência (x^k) converge para x^*.

4. (15 pontos) Seja Q uma matriz simétrica definida positiva e considere $\{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes. Considere $d^1 = v^1$ e para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, defina
   $$d^{k+1} = v^{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \theta_i^{k+1} d^i, \qquad \text{com} \qquad \theta_i^{k+1} = \frac{(v^{k+1})^T Q d^i}{(d^i)^T Q d^i}.$$
   Mostre que $\{d^1, d^2, \ldots, d^n\}$ são Q conjugados.

5. (15 pontos) Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função quadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x$, com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz definida positiva. Seja $S \in \mathbb{R}^{n\times r}$ uma matriz cujas colunas são linearmente independentes. Dado $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, considere a variedade afim $V = \{\bar{x} + S\gamma \mid \gamma \in \mathbb{R}^r\}$. Pede-se:

   (a) Mostre que $x^+ = \bar{x} - S(S^T A S)^{-1} S^T \nabla f(\bar{x})$ é o minimizador de f em V.

(b) Conclua que $S^T \nabla f(x^+) = 0$.

(c) Faça uma figura elucidativa do resultado do item anterior, considerando $n = 2$ e $r = 1$.

6. (15 pontos) Suponha que estejam disponíveis as seguintes rotinas:

- `fun(x)`: que fornece o valor da função `func` no ponto x.
- `grad(x)`: que fornece o vetor gradiente da função `func` no ponto x.
- `aurea(func,x,d)`: que fornece o comprimento do passo ao longo da direção d a partir do ponto x para a função `func`.

Considere

$$H^{k+1} = H^k + \left(1 + \frac{(q^k)^T H^k q^k}{(p^k)^T q^k}\right) \frac{p^k (p^k)^T}{(p^k)^T q^k} - \frac{p^k (q^k)^T H^k + H^k q^k (p^k)^T}{(p^k)^T q^k}, \tag{1}$$

onde $p^k = x^{k+1} - x^k$ e $q^k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)$.
Escreva uma rotina em `Julia` correspondente ao algoritmo abaixo, evitando a repetição de cálculos desnecessários.

Algoritmo 1 *Quase-Newton - BFGS*

Dados $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $H_0 = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\varepsilon = 10^{-6}$, $kmax = 5n$
$k = 0$
REPITA enquanto $\|\nabla f(x^k)\| > \varepsilon$ e $k < kmax$
  Defina $d^k = -H^k \nabla f(x^k)$
  Obtenha o comprimento do passo $t_k > 0$ por busca exata
  Faça $x^{k+1} = x^k + t_k d^k$
  Determine H^{k+1} por (1)
  $k = k + 1$