UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Fractais por *Iterated Function Systems*

CMM102 - Tópicos de Matemática 2: Fractais

Professora Elizabeth Wegner Karas

Curitiba, Novembro de 2019.

Conteúdo

Capítulo 1

Sistema de Funções Iterativas

Afonso Ferronato Neto
Raul Gomes

Neste capítulo apresentamos as ideias básicas dos sistemas de funções iteradas para fractais.

1.1 Definição

Seja X um Espaço, d uma função e (X, d) um Espaço Métrico e $F{:}X \to X$ uma transformação contrativa, isto é, existe $0 \leq s \leq 1$ tal que $d(F(x), F(y)) \leq s.d(x, y)$. Definimos como um IFS o conjunto finito de funções

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} f_i$$

1.2 Cálculo de fractais

Existem duas formas de calcular fractais por IFS: uma forma determinística e uma não determinística. Além disso, sua representação abrange, entre outros formatos, gramáticas de forma normal.

1.2.1 Forma determinística

A forma deterministica consiste em escolher um conjunto inicial X_0 e aplicar as transformações T_i nos elementos do conjunto X_0 de forma a gerar um novo conjunto X_1, e repetir o procedimento de modo iterativo, de forma que

$$X_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} T_i(X_n)$$

Mas como o processo computacional cresce exponencialmente em poucos casos, normalmente tiliza-se o cálculo não deterministico.

1.2.2 Forma não determinística

A forma não determinística é conhecida como Jogo do Caos, ela consiste em dar uma probabilidade p_n para cada função T_n. Escolhe-se em seguida um ponto $d_0 \in X$ e então aplica as funções T_i de forma aleatória. Onde temos que a probabilidade p_n para cada função T_n não influencia no fractal, apenas no custo operacional.[20]

1.2.3 Gramática normal

A representação de um fractal IFS enquanto gramática de forma normal foi introduzida pelo botânico Lindenmayer em [17]. Ela consiste, essencialmente, de instruções para desenho no plano: em geral, gravura e movimento.

Desenhos no plano

Uma maneira um pouco mais didática do que a última frase de explicar o assunto é utilizando uma tartaruga imaginária e obediente. A ela, podemos dar instruções de movimento (dê um passo à frente, vire ao seu lado, entre outros) e instruções de gravura - onde a tartaruga se move deixando um rastro no caminho.

Se queremos representar uma iteração do conjunto de Cantor, por exemplo, queremos que nossa tartaruga dê um passo com gravura, um passo normal e outro passo com gravura. Isso nos renderá um segmento sem seu terço médio.

Gramáticas

Uma gramática simples G é definida por uma tripla da seguinte forma:

$$G = (V, \omega, P)$$

Onde V é um conjunto de variáveis e terminais, ω é um conjunto de variáveis iniciais e P é um conjunto de regras de produção.

Variáveis são elementos que podem ser estendidos, sendo opostos aos **terminais**. Consideremos a expressão $e =$ `aaAaa`, onde `a` é um terminal e `A` é uma variável que significa `a`. Nossa expressão é estendida para `aaaaa`, onde o elemento central é o valor estendido da variável.

As **regras de produção** da nossa gramática são construções sobre o significado de variáveis. Uma variável pode significar somente uma coisa, como no exemplo acima:

$$A \to a$$

Mas uma variável pode significar mais de uma coisa (e o valor escolhido na estensão da expressão é arbitrário). Digamos que a variável acima pudesse valer `b`:

$$A \to a|b$$

O mais útil das gramáticas para nossos propósitos é que regras de produção podem ser recursivas. Vejamos uma linguagem que descreve todas as palavras que podem ser formadas somente pela letra a, independentemente de seu tamanho:

$$G_a = (\{S, a\}, \{S\}, \{S \to Sa|a\})$$

Gramáticas podem ser muito complexas, e suas aplicações são das mais diversas. Compiladores de linguagens de programação, por exemplo, são baseados em gramáticas e seus interpretadores (conhecidos como autômatos). O que temos em mente, no entanto, já é suficiente para a exposição de sua utilidade na representação de fractais - portanto, não nos atrasemos.

Tartarugas, gramáticas e, finalmente, fractais

Uma gramática para desenho do conjunto de Cantor pode ser tão simples quanto a seguinte:

$$G_c = (\{A, B\}, \{A\}, \{A \to ABA, B \to BBB\})$$

Onde um A significa passo com gravura e um B significa apenas passo. Note que as regras de produção desta gramática oferecem recursões sem base, que é a ideia de um fractal. Abaixo, algumas iterações deste desenho do conjunto:

$$A$$

$$ABA$$

$$ABABBBABA$$

$$ABABBBABABBBBBBBBBABABBBABA$$

As mesmas iterações, "desenhadas":

```
            -
           - -
        - -   - -
- -   - -       - -   - -
```

1.3 Exemplos

1.3.1 Tapete de Sierpinski

O Tapete de Sierpinski foi desenvolvido pelo polonês Waclaw Sierpinski, e é gerado pelas funções:

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x \qquad f_2(x) = \frac{1}{3}x + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{3}x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad f_4(x) = \frac{1}{3}x + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_5(x) = \frac{1}{3}x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad f_6(x) = \frac{1}{3}x + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$f_7(x) = \frac{1}{3}x + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad f_8(x) = \frac{1}{3}x + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Como a cada iteração temos $\frac{8}{9}$ da área anterior, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{8}{9})^n = 0$, ou seja sua área tende a zero e sua dimensão de Hausdorff-Besicovitch, definida por:

$$d = \lim_{n\to 0} \frac{\ln N(n)}{\ln n}$$

Onde d é a dimensão, $N(n)$ é o número de quadrados necessário para cobrir o fractal n é o tamanho das caixas usadas para cobrir o fractal.[14] Portanto sua dimensão é:

$$d = \lim_{n\to 0} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = 1,8928...$$

Capítulo 2

Aplicações

Expomos, agora, utilizações diversas dos fractais gerados por IFS.

2.1 Computação bioinspirada

A computação bioinspirada é um ramo da ciência da computação que abrange três grandes frentes: inspiração na natureza para a resolução de problemas computacionais, uso de recursos computacionais para estudo da natureza e representação da natureza com recursos computacionais. Uma área da computação bioinspirada que vem se tornando bem popular nos últimos anos é a computação quântica. Outro tópico que em geral surpreende à primeira vista é a computação por DNA, que substitui materiais de silício por DNA.

Um pedaço de computação bioinspirada com fractais é a compressão fractal de imagens, que consiste em buscar um IFS que represente bem uma imagem. Essa compressão apresenta poucas perdas e traz como resultado um arquivo muito menor do que o anterior (é muito mais custoso guardar uma matriz de cores - uma imagem - do que um conjunto de pequenas matrizes - as transformações do nosso IFS).

Outro uso que a computação bioinspirada faz dos fractais é na geração de paisagens - geralmente usada em jogos e filmes -, que se baseia no conceito de que a natureza é fractal e, portanto, o desenho da mesma deve seguir regras fractais. Florestas e terrenos construídos com base em sistemas de funções iteradas, em geral, são mais fidedignos do que suas alternativas tradicionais.

2.2 Antenas

Outra utilização de fractais é em radares, onde com uma iteração finita n de um fractal, pode-se miniaturizar uma antena de radar[18] e manter suas propriedades como SNR (Relação entre Sinal-Ruído), resolução angular e alcance do radar.[19]

2.3 Medicina

Fractais já foram utilizados no estudo do desenvolvimento de estruturas complexas no organismo humano, como nosso sistema respiratório (que se assemelha a uma árvore) e tumores em geral ([12]).

Capítulo 3

Considerações finais: pesquisa atual em fractais por IFS

Para encerramento do trabalho, seus autores julgaram interessante a exposição de algumas publicações acerca de fractais gerados por IFS que fossem recentes e diversificassem a visão do leitor sobre o que foi estudado. Deseja-se que a divulgação a seguir traga luz sobre a importância dos fractais em díspares assuntos da ciência.

Um estudo ([16]) publicado em maio de 2019 na universidade de Cornell, com o objetivo de estudar a capacidade de expressão de redes neurais profundas, mostrou que estas são capazes de desenho de fractais com eficiência muito maior do que aquela encontrada em métodos tradicionais que se baseavam em IFS.

Já na universidade de Yale ([13]), mostrou-se equivalência entre máquinas de Turing (essencialmente uma formalização do computador enquanto ferramenta de computação) e fractais para a renderização de regiões atratoras dos fractais estudados.

Bibliografia

[1] Fractal antenna systems. `https://www.fractenna.com/`. Acesso em 2019.

[2] Fractal image coding. `http://atastypixel.com/blog/fractal-image-coding/`. Acesso em 2019.

[3] B. J. West A. L. Goldberger. Fractals in physiology and medicine. 1987.

[4] R. M. Barbosa. *Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula*. Autêntica, Belo Horizonte, Brasil, 2002.

[5] M. F. Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press Inc., Atlanta, 1988.

[6] E. G. Birgin and J. M. Martínez. Local convergence of an inexact-restoration method and numerical experiments. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 127:229–247, 2005.

[7] R. H. Byrd. Robust trust region methods for constrained optimization. Third SIAM Conference on Optimization, 1987.

[8] C. M. Chin. *A new trust region based SLP-filter algorithm which uses EQP active set strategy*. PhD thesis, Department of Mathematics, University of Dundee, Scotland, 2001.

[9] C. M. Chin. A global convergence theory of a filter line search method for nonlinear programming. Technical report, Numerical Optimization Report, Department of Statistics, University of Oxford, England, September 2002.

[10] A. R. Conn, K. Scheinberg, and P. L. Toint. On the convergence of derivative-free methods for unconstrained optimization. In M.D. Buhmann and A. Iserles, editors, *Advances in Nonlinear Programming*, pages 83–108. Cambridge University Press, Inglaterra, 1997.

[11] K. Falconer. *Fractal geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley and Sons, Inglaterra, segunda edition, 2003.

[12] E. W. Karas G. S. Guandalini. Morfometria e geometria fractal: imageamento fractal como descritor de agressividade nas displasias epiteliais orais. 2006.

[13] M. Frame K. Saxer-Taulbee. A driven ifs representation of turing machines. 2019.

[14] E.W. Karas. Iteração de transformações racionais aplicada ao método de Newton no plano complexo. Dissertação de mestrado em Matemática Aplicada, IME-USP, São Paulo, Brasil, 1994.

[15] B. McCollum. A perspective on bridging the gap between theory and practice in university timetabling. In *Proceedings of the 6th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling - PATAT*, volume 3867, pages 3–23. Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science, 2006.

[16] I. Daubechies N. Dym, B. Sober. Expression of fractals through neural network functions. 2019.

[17] A. Lindenmayer P. Prusinkiewicz. *The Algorithmic Beauty of Plants*. Springer-Verlag, 1990.

[18] A. A. Potapov. *Fractals in radiophysics and radar*. Logos, Moscow, 2002.

[19] M. A. Richards. *Principles of Modern Radar*. Scitech, New York, 2002.

[20] D. Salomon. *Data Compression. The Complete Reference*. Springer, New York, segunda edition, 2000.

[21] C.P. Serra and E.W. Karas. *Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos*. Champagnat, Curitiba, Brasil, 1997.

[22] J. Vass. On the geometry of ifs fractals and its applications. 2013.