PLANO DE AULA

DISCIPLINA: Tópicos de Matemática 2: Fractais

Professora: Elizabeth Wegner Karas

Bruno Domingos Fasolin
GRR20170399

Maria Izabel Lara
GRR20160260

Moroni Menesses Bruch Bora
GRR20160247

Rita de Cassia Bianchi
GRR20144935

1. TEMA: Triângulo de Sierpinski;

2. ANO A SER TRABALHADO: 1° ano do ensino médio;

3. DURAÇÃO: Cinco aulas (duração de 45 minutos cada uma);

4. CONTEÚDO:

- Progressão geométrica;
- Fractais;

5. OBJETIVOS:

5.1 Objetivos gerais:

- Competência de área 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral;
- Competência de área 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias,

identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

5.2 Objetivos específicos:

- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem;
- Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos;
- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas;
- Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma;
- Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
- Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

6. DESENVOLVIMENTO

6.1 Conhecimentos prévios: Os alunos deverão ter conhecimentos das principais características das progressões aritméticas e geométricas

6.2 Encaminhamento metodológico:

6.2.1 Primeira aula com duração de 50 minutos: Será uma aula de retomada de conteúdo sobre PA e PG. Essa aula será feita no quadro com apresentação de problemas para serem resolvidos. (Aqui estamos considerando que os alunos já tiveram as aulas necessárias para PA, PG, Função exponencial). Como a aula é de resolução de problemas, no ANEXO 1, segue alguns modelos de exercícios que serão aplicados em sala de aula.

6.2.2 Segunda aula com duração de 50 minutos: Na segunda aula, serão apresentadas aos alunos as principais características para se reconhecer um fractal e como é construído o triângulo de Sierpinski. Porém, antes da apresentação, os

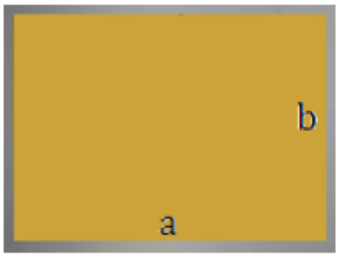
alunos farão um cartão que utilizará esses conceitos. Abaixo segue o desenvolvimento da sequencia para a construção desse cartão.

6.2.2.1: Materiais:

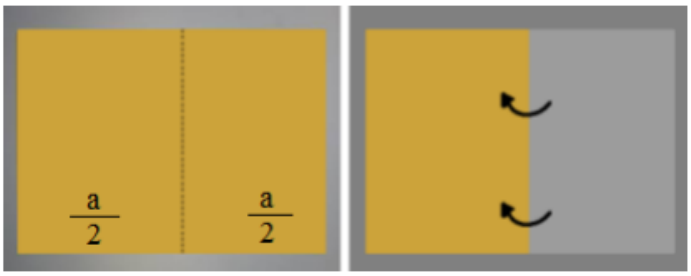
- Papel sulfite;
- Papel cartão;
- Tesoura;
- Cola;
- Régua;
- Lápis.

6.2.2.2: Passo a Passo:

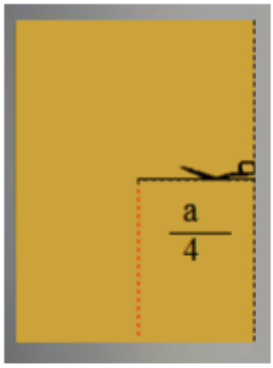
- 1° passo: pegue uma folha de papel sulfite, de comprimento a e largura b, conforme figura abaixo:



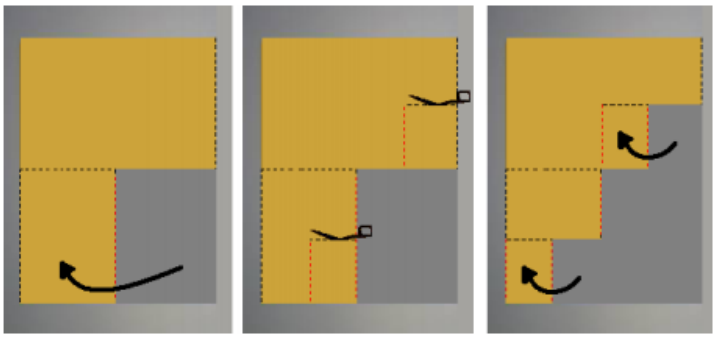
- 2° passo: dobre a folha ao meio, conforme figura abaixo:



- 3° Passo: Após dobrar a folha corte-a ao meio, como mostra a figura abaixo:

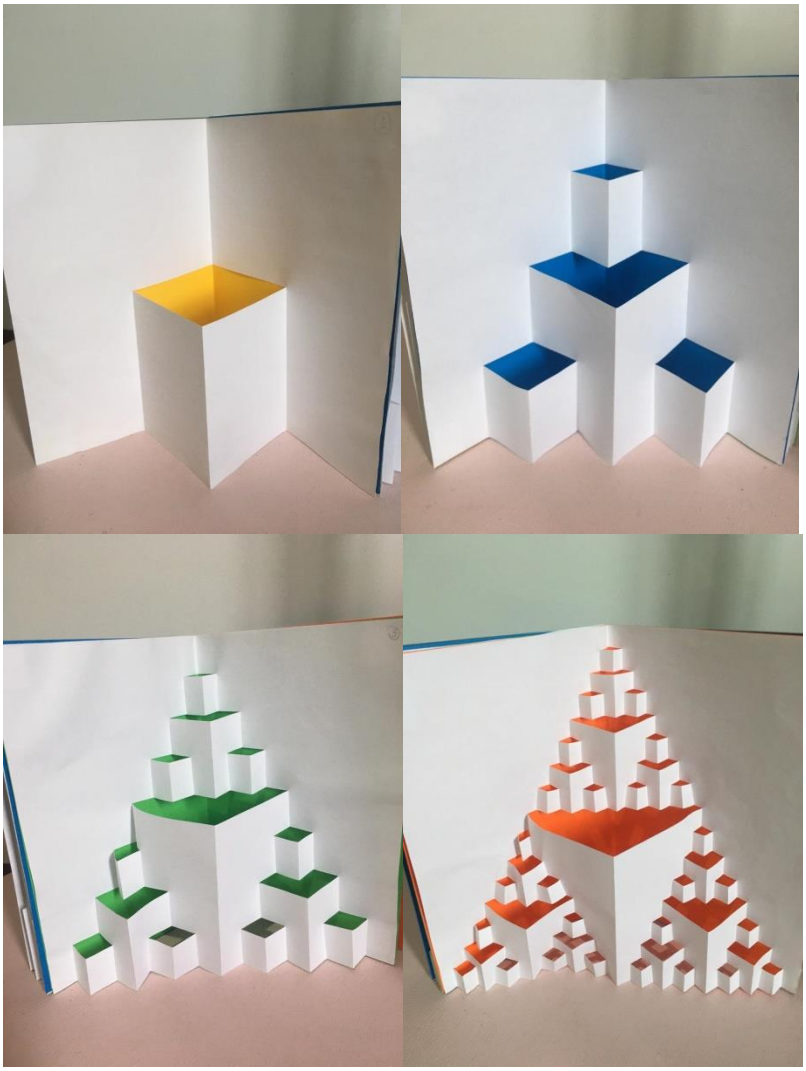


- 4° Passo: Dobre a parte que foi cortada para dentro de si, veja abaixo:



- 5º Passo: Repita o processo descrito nos passos anteriores quantas vezes forem possíveis.
- 6º Passo: Cole a folha sulfite em uma folha colorida de papel cartão, para obter o fundo do cartão de Sierpinski.

Veja abaixo uma sequência de cartões fractais Triângulo de Sierpinski, desde a primeira à quarta iteração.



Após a construção do cartão, será feita a seguinte apresentação:

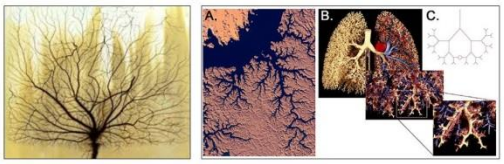
GEOMETRIA FRACTAL

- Características da Geometria Fractal;
- Conjunto de Cantor;
- Triângulo de Sierpinsk;

CARATERÍSTICAS DA GEOMETRIA FRACTAL

- De acordo com Silva (2015), Fractal é uma palavra que tem origem do latim, fractus ou fragere que significa fragmentar, quebrar. Esse termo foi usado, pela primeira vez em 1975, pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot (1924 – 2010) para nomear formas geométricas que possuíam entre si uma característica particular, a auto-similaridade ou auto-semelhança, diferentes das tradicionais estudadas pela geometria euclidiana.

- O termo fractal aplica-se, em geral, a construções muito diversas, tanto formas abstratas como formas encontradas na natureza e que são objeto de estudo da física, da geologia, da cristalografia e de outras ciências (MURR, et al., 2005).

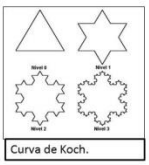


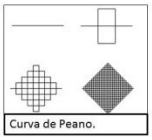
Para Kenneth Falconer uma figura geométrica é considera fractal se possuir:

- ✓ Estrutura fina em qualquer etapa: sucessivas ampliações de um fractal geram mais detalhes, indefinidamente;
- ✓ Não pode ser representado por uma simples função;
- ✓ Possui alguma espécie de auto-similaridade (obter réplicas menores idênticas da figura através de sua divisão ou de sua ampliação) ou auto-afinidade (não há réplicas, as figuras são obtidas através de transformações afins);
- ✓ Sua dimensão fractal é estritamente maior que sua dimensão topológica;
- ✓ Em muitos casos tem uma lei de formação. Essa lei representa o processo de repetição em cada iteração.

- Existem várias figuras matemáticas que são fractais como, por exemplo, o triângulo de Sierpinsk, a curva de Koch (ou floco de neve) e a curva de Peano.

Triângulo de Sierpinsk.


Curva de Koch.


Curva de Peano.

CONJUNTO DE CANTOR

- Georg Cantor (1845-1918), matemático com nacionalidade alemã, foi o pioneiro nos estudos conhecidos como Teoria dos Conjuntos e em 1883, publicou no trabalho Mathematische Annalen estudos sobre o que hoje conhecemos como "Conjunto de Cantor" ou "Poeira de Cantor" (BARBOSA, 2005, citado por SILVA 2015).

- A **CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA** do conjunto de Cantor é denominada Fractal do Terço Médio de Cantor e é construída, de acordo com Silva, 2015, da seguinte maneira:

1) Considera um segmento de reta;

2) Divida o segmento de reta em três partes iguais e exclua a parte central;

3) Repita o item 2 em cada um dos segmentos e assim sucessivamente como na figura abaixo:

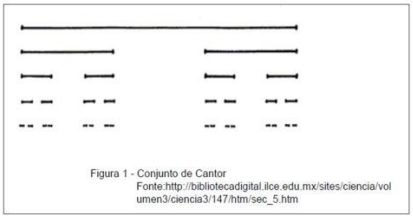


Figura 1 - Conjunto de Cantor
Fonte:http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/147/htm/sec_5.htm

4) Considere o conjunto formado por todos os pontos resultantes deste processo infinito.

ATIVIDADE 1 – Lápis, papel e régua: Criar seu conjunto de Cantor seguindo o exemplo acima.

A **dimensão de homotetia ou auto-similaridade** é encontrada no conjunto de Cantor e consiste em obter réplicas menores da figura, quando de sua divisão ou ampliação. Portanto a razão de semelhança considerando um segmento e dividindo esse segmento em n partes iguais, é de:

$$n = \frac{1}{r^D}$$

r = é a razão de semelhança;
D = dimensão espacial da figura, nesse caso D = 1;

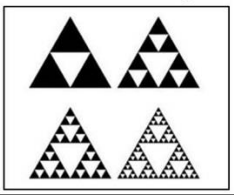
Para isolar a variável D, aplica-se a função logarítmica *ln* obtendo a seguinte relação:

$$D = -\frac{\ln r}{\ln D}$$

TRIÂNGULO DE SIERPINSK

- De acordo com Bemfica e Alves, 2010, o Triângulo de Sierpinski foi descoberto pelo matemático Waclav Sierpinski (1882-1969).
- Sua construção é feita pelo processo de remoção de triângulos.
- Marca-se os pontos médios dos lados desses triângulos equilátero, une esses pontos originando quatro triângulos semelhantes

- Retira-se o triângulo invertido em relação ao original e deixa os outros três. Assim, repete-se no passo seguinte o mesmo procedimento;
- O fractal obtido é estritamente auto-semelhante, ou seja, as partes da figura são cópias reduzidas de toda a figura.



Propriedades Geométricas:

- O processo de obtenção desse fractal por remoção de triângulos nos permite analisar o número de triângulos, o perímetro, e a área da figura obtida nos diferentes níveis de construção.
- Por indução finita, em Murr *et al.* 2005, foi provado que a relação entre o nível de construção e o número de triângulos obtidos é definida pela seguinte fórmula:

$$N_k = 3^k,$$

Onde,
Nk = número de cada triângulos no nível k;
k = número de nível;

Propriedades Geométricas:

- Com o mesmo método foi provado o perímetro, logo a relação existente é a seguinte:

$$P_k = 3\left(\frac{3}{2}\right)^k l$$

Onde,
Pk = Perímetro de cada triângulo no nível k;
l = lado do triângulo equilátero;
k = número de nível.

Propriedades Geométricas:

- Considerando a área do triângulo inicial como uma constante, a área do triângulo em cada nível ficou definido da seguinte maneira:

$$S_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k A_o,$$

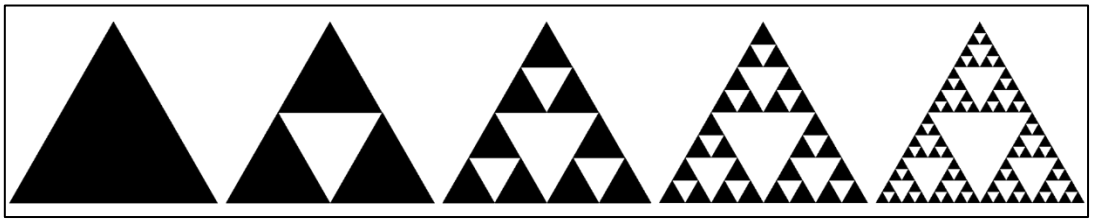
Onde:
S_k = Área de cada triângulo no nível k;
A_o = Área inicial do triângulo;
k = nível.

6.2.3 Terceira e quarta aulas com duração de 50 minutos cada uma: Essas duas aulas serão aulas práticas para a construção do triângulo de Sierpinski envolvendo as regras de PA e PG para responder as perguntas abaixo:

SEQUÊNCIA DA AULA:

Primeiro momento (terceira aula): os alunos (com lápis, papel, régua e borracha) irão construir um triângulo de Sierpinski seguindo as regras abaixo:

1) Comece com qualquer triângulo em um plano. O triângulo de Sierpinski canônico utilizava um triângulo equilátero com a base paralela ao eixo horizontal, mas qualquer triângulo pode ser usado (ver primeira figura).
2) Encolha o triângulo pela metade (cada lado deve ter metade do tamanho original), faça três copias, e posicione cada triângulo de maneira que encoste nos outros dois em um canto (ver segunda figura).
3) Repita o passo 2 para cada figura obtida, indefinidamente (ver a partir da terceira figura).

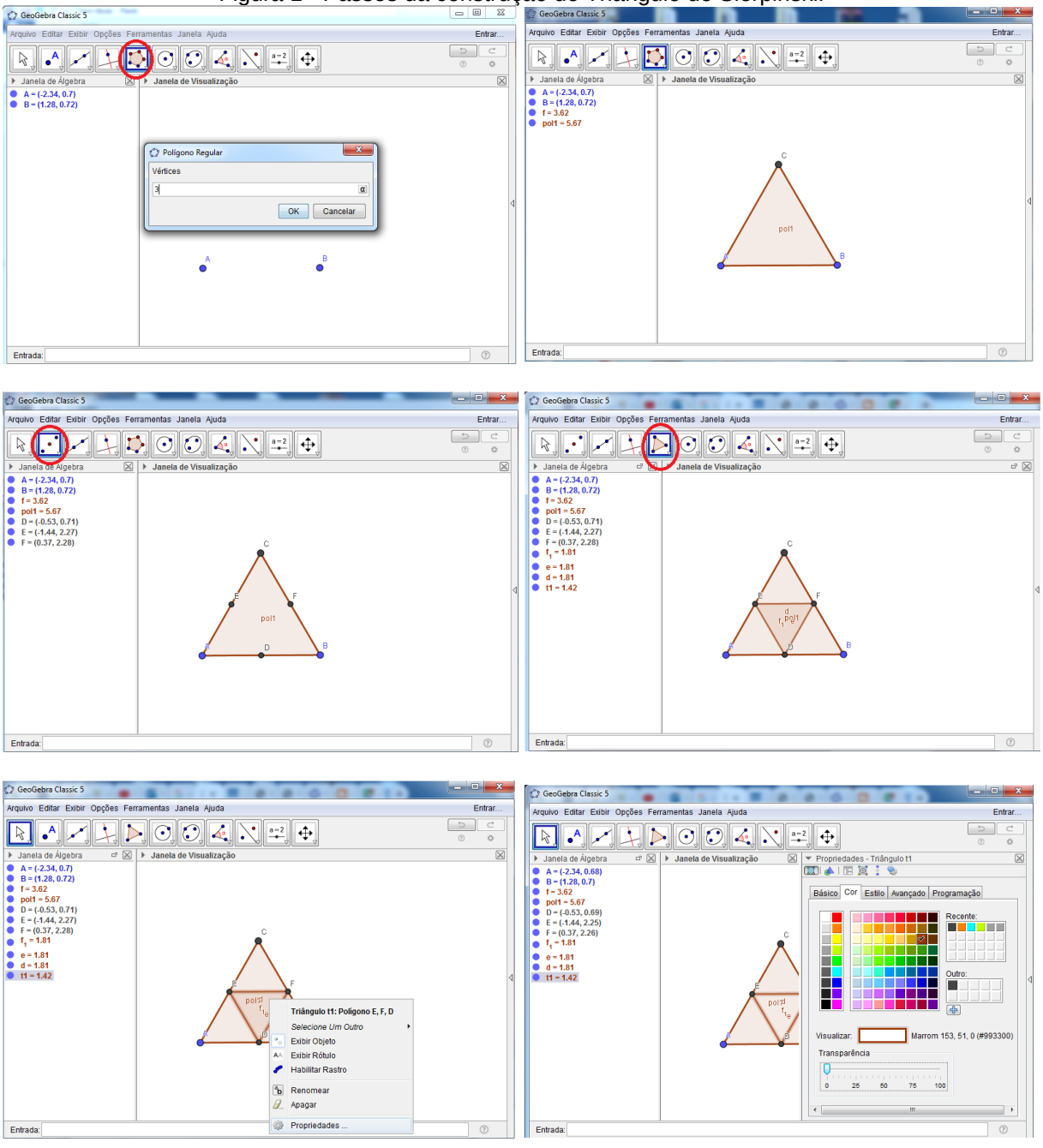


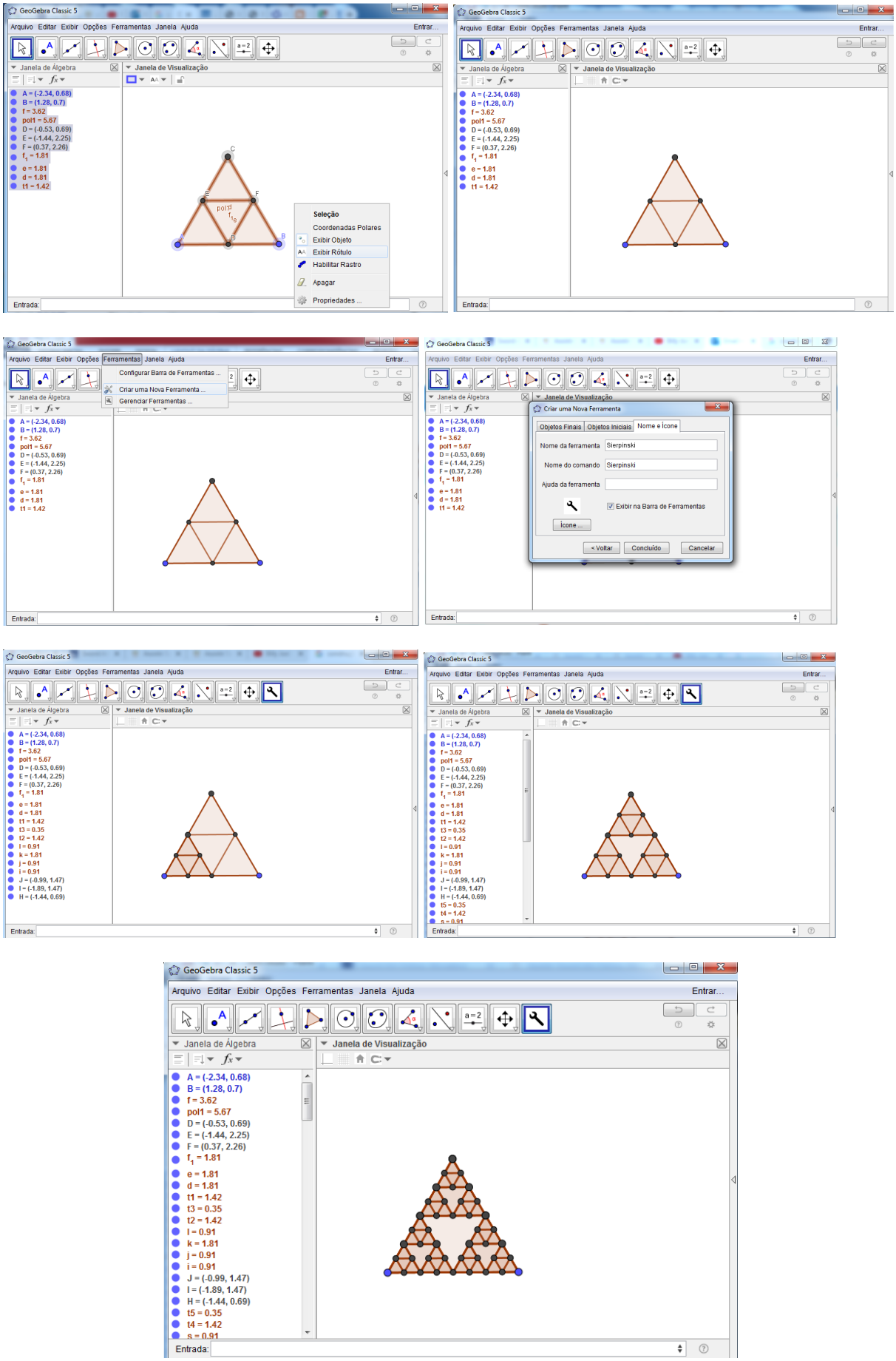
Caso o colégio disponha de recursos computacionais, a construção do triângulo de Sierpinski pode ser feita por um software de geometria dinâmica. A utilização de recursos tecnológicos pode ser uma alternativa para ajudar a tornar as aulas de matemática mais estimulantes. Apresentaremos um tutorial para construção do Triângulo de Sierpinski no software de geometria dinâmica Geogebra.

Comece a construção com a ferramenta polígono regular, escolha dois pontos na janela de visualização, após isso coloque o número 3 para indicar que deseja um triângulo regular. Selecione a ferramenta ponto médio ou centro, selecione o segmento AB, deste modo foi encontrado o ponto médio D. De forma análoga foram encontrados os pontos E e F. Agora selecione a ferramenta polígono, e clique nos pontos D, E e F, desta forma será criado o polígono com o nome t1. Após este processo, clique com o botão direito em t1, vá em propriedades, cor e altere a transparência para zero. Para sumir com os rótulos, ou seja, com os nomes dos pontos, utilize o comando ctrl + A, que seleciona toda a figura, e clique com o botão direito, selecione a opção exibir rótulos, clique novamente com o botão direito e selecione novamente a opção exibir rótulos. Agora crie a ferramenta que irá repetir sempre o mesmo padrão. Selecione toda a figura utilizando ctrl + A, vá em ferramentas, clique em criar uma nova ferramenta, clique no botão “próximo” duas vezes, e em Nome e Ícone mude o nome da ferramenta para Sierpinski, em seguida clique em concluído. Agora com a ferramenta já criada, selecione a ferramenta

Sierpinski e os pontos A e D, D e B e E e F. Deste modo será obtida a iteração 2. De modo análogo você poderá obter as próximas iterações.

Figura 1 - Passos da construção do Triângulo de Sierpinski.





Fonte: Interface do GeoGebra.

Segundo momento (Quarta aula): Depois da construção do triângulo de Sierpinski e discussões feitas em sala de aula para entender as relações matemáticas envolvidas nessa criação junto com os conceitos de PA e PG, os alunos irão responder as seguintes questões:

Questão 1: Escreva os 5 primeiros termos da sequência de número total de triângulos, ou seja, a sequência onde o primeiro termo indica a quantidade de triângulos brancos no triângulo original, o segundo a quantidade de triângulos brancos na segunda iteração, o terceiro a quantidade de triângulos brancos na terceira.

Questão 2: Qual é o próximo termo da sequência?

Questão 3: O que acontece de um termo ao seu termo sucessor?

Questão 4: Se o processo continuar, quantos triângulos teremos no passo 10?

Questão 5: Agora, vamos analisar o número total de triângulos em cada estágio. Escreva os cinco primeiros termos da sequência onde o 1º termo indica a quantidade de triângulos no estágio original, o 2º termo indica a quantidade de triângulos brancos no estágio 1, e assim sucessivamente.

Questão 6: Qual é o próximo termo dessa sequência?

Questão 7: Quantos triângulos teremos se continuarmos o processo indefinidamente?

6.2.4 Quinta aula com duração de 50 minutos: Para finalizar as aulas de geometria fractal os alunos irão resolver uma situação problema que envolve os conceitos vistos para a construção de um Fractal de Sierpinski. Nessa última aula, depois de terem respondido as questões na aula anterior, será feito a seguinte pergunta:

Já que o número de triângulos é infinito, podemos dizer que a área pintada também será infinita?

O objetivo é gerar um conflito. Em geral, os alunos se espantam coma a ideia de que a soma da área de infinitos triângulos não é um número infinito. A discussão será da seguinte maneira:

1) Construir uma tabela com as medidas do lado do triângulo branco (cm) e a área de cada triângulo branco (cm^2) em cada estágio. Segue modelo de tabela:

Estágio	Medida do lado do triângulo branco (cm)	Área de cada triângulo branco (cm²)

- Questionar o que acontece com a medida do lado do triângulo branco e com a sua área em cada estágio;
- Calcular a área dos triângulos brancos nos seis primeiros estágios. O que ocorre com a soma da área dos triângulos brancos a cada novo estágio.
- Calcular a área pintada nos seis primeiros estágios.
- Modelo da tabela final:

Estágio	Área de cada triângulo branco (cm²)	Quantidade de Triângulos Brancos	Soma da área de cada triângulo branco (cm²)

- Concluir, com os alunos, que a cada novo termo a área se aproxima à área do triângulo inicial;

- **Feedback** do que foi visto nas aulas anteriores. Será feita uma retrospectiva de todo o projeto instigando os alunos a apresentarem o cronograma que foi criado durante as aulas, realizando as seguintes perguntas em sequência:
  - Vocês já tinham feito a relação entre PA e PG na sequencia de construção de triângulos?
  - Vocês já tinham identificado a geometria fractal na vida real? Cite exemplos?
  - Como foi para vocês essa oficina/aula?
  - Vocês sentem que aprenderam PA e PG de uma maneira menor (ou pior) do que aprenderiam tivessem uma aula expositiva sobre o assunto?

7. RECURSOS: Papel sulfite; Régua; Tesoura; Compasso; Projetor;

8. APENDICES:

APENDICE 1 – MODELOS DE PROBLEMAS PARA RESOLUÇÃO

Atividade 1 - Encontre o termo geral da progressão aritmética (PA) A = (3, 7, ...);

Atividade 2 - A soma dos 20 termos de uma PA é 500. Se o primeiro termo dessa PA é 5, qual é a razão r dessa PA?

Atividade 3 - (UF – CE) A soma dos 15 primeiros termos de uma progressão aritmética é 150. O 8° termo dessa PA é:

Atividade 4 - (Osec – SP) Um jardim tem uma torneira e dez roseiras dispostas em linha reta. A torneira dista 50 m da primeira roseira e cada roseira dista 2 m da seguinte. Um jardineiro, para regar as roseiras, enche um balde na torneira e despeja seu conteúdo na primeira. Volta à torneira e repete a operação para cada roseira seguinte. Após regar a última roseira e voltar à torneira para deixar o balde, ele terá andado:

Atividade 5 - (Vunesp) Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. A espessura de cada tábua é 0,5 cm. Forma-se uma pilha de tábuas colocando-se uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já estejam na pilha.

Determine, ao final de nove dessas operações:

a) quantas tábuas terá a pilha;

b) a altura, em metros, da pilha.

Atividade 6 - Determine a soma dos 10 primeiros termos da PG (1, 3, 9, 27).

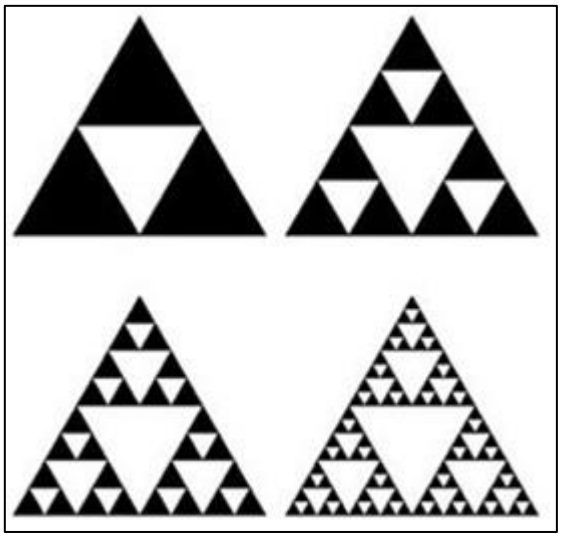
Atividade 7 - (ITA/2000) O valor de n que torna a seqüência (2 + 3n; –5n; 1 – 4n) uma progressão aritmética pertence ao intervalo:

a) [– 2, –1] b) [– 1, 0] c) [0, 1] d) [1, 2] e) [2, 3]

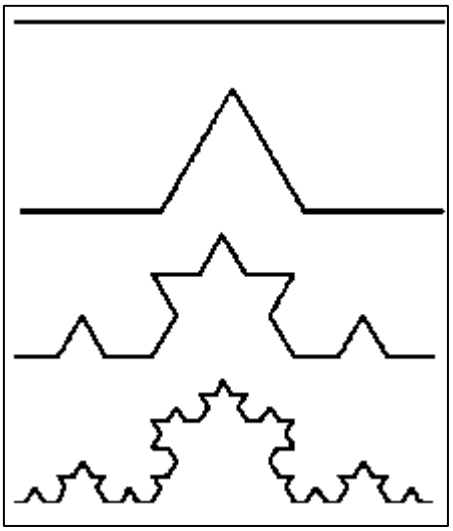
Atividade 8 - (MACK) O sexto termo de uma PG, na qual dois meios geométricos estão inseridos entre 3 e -24, tomados nessa ordem, é:

Atividade 9 - A soma dos infinitos termos da P.G (x/2; x2/4; x3/8; …) é igual a 1/10. Qual o valor de x?

APENDICE 2 - SEQUENCIA DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI E DA CURVA DE KOCH



Triângulo de Sierpinski



Curva de Koch

9. REFERÊNCIAS:

ADAMI, P. S.; SOARES, E. A. F.; SOUZA, L. de F. R. **Geogebra e o triângulo de Sierpinski: Uma intervenção pedagógica para o ensino médio**. Revista Eletrônica de Educação e Ciência, São Paulo, v. 7, n. 1, p. 44-61, mar. 2017. Disponível em: http://fira.edu.br/revista/wpcontent/uploads/2017/03/2017_vol7_num1_pag44.pdf Acesso em: 29/10/2019.

BARBOSA, R.M. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3ª edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005. 160p

BEMFICA, A., ALVES C. **Fractais: progressão e série geométrica. Uma metodologia de ensino**. Disponível em: <http://facos.edu.br/publicacoes/revistas/modelos/agosto_2011/pdf/fractais_progressao_e_serie_geometrica.pdf> Acesso em: 24/09/2019.

MURR, et al. 2005, **Fractais: Propriedades e Construções**. Universidade Federal do Paraná, Iniciação Científica, Curitiba 2005.

PAIXÃO, et al. **Aprendendo a matemática com o triângulo de Sierpinski**. ENEM, São Paulo, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5516_2870_ID.pdf> Acesso em: 16/09/2019.