

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CMM102 - Tópicos de Matemática 2: Fractais  
Professora Elizabeth Wegner Karas  
Trabalho em grupos

Curitiba, novembro de 2019.

# Introdução

Os fractais deram origem a um novo ramo da matemática, muitas vezes designado como a geometria da natureza. As formas estranhas e caóticas dos fractais descrevem alguns fenômenos naturais, como os sismos, o desenvolvimento das árvores, as redes hidrográficas, a estrutura da casca de uma árvore, a forma de algumas raízes, como do gengibre, a linha de costa marítima, as nuvens. É importante ressaltar que figuras que no século passado eram vistas como anomalias matemáticas, hoje apresentam um papel fundamental na interpretação da realidade. Além disso, este tipo de geometria aplica-se em variados ramos como na Arte, na Astronomia, no Cinema, na Economia, na Hidráulica, na Geologia, na Meteorologia e até na Linguística, onde a teoria dos fractais é utilizada na evolução dos dialetos.

Esse trabalho apresenta uma pesquisa sobre algumas aplicações de fractais. Existem diversos fractais na natureza, bem como diversas aplicações e utilidades como solução para problemas ainda não resolvidos. Existem aplicações dos fractais na construção civil, no cinema, medicina, tecnologia, indústrias, mercado financeiro, sistemas fluviais, etc... Como existem inúmeras aplicações, cada integrante escolheu uma na qual dedicou-se exclusivamente em pesquisá-la, estudá-la e apresentar por escrito neste trabalho.

**Autores:** *Gawed Lexidor, João Espíndola e Nathaly Stefanovicz*

# Sumário

<b>1</b>	<b>Aplicação 1</b>	<b>i</b>
1.1	A acústica . . . . .	i
1.2	O fractal e a Barreira Acústica . . . . .	iii
<b>2</b>	<b>Aplicação 2</b>	<b>v</b>
2.1	Como o fractal é utilizado na triagem do câncer de mama . . . . .	v
<b>3</b>	<b>Aplicação 3</b>	<b>vii</b>
3.1	Teoria das Curvas de Elliott . . . . .	vii
3.2	Padrão Geométrico ou Fractal das Ondas de Elliott . . . . .	viii
3.3	Por que fazer o mapeamento das Ondas de Elliott? . . . . .	xii
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>xiv</b>

# Capítulo 1

## Aplicação 1

*João Espíndola*

Barreiras acústicas são ferramentas criadas com intuito de diminuir a passagem de sons entre ambientes. O uso mais comum das barreiras acústicas é em estúdios e casas de show: em ambos os casos, não se quer que o som de dentro do ambiente vá para fora, para não incomodar a vizinhança e respeitar leis sobre poluição sonora em vias públicas; ao mesmo tempo que não se quer que sons de fora (como carros, por exemplo) atrapalhem o som da música que está sendo tocada na casa. No entanto, o uso de barreiras acústicas já faz parte da vida de muitas pessoas, mesmo que não frequentem ambientes como os citados acima. A NBR 15.575 da ABNT, de 2013, requisita que haja um nível médio de isolamento entre ambientes, tanto dentro de uma unidade habitacional, quanto entre unidades habitacionais distintas que dividem parede (por exemplo, apartamentos), de modo que a privacidade de cada indivíduo seja respeitada.

### 1.1 A acústica

Existem dois tipos de trabalho acústico em ambientes: O tratamento acústico e o isolamento acústico. O tratamento acústico é um trabalho interno do ambiente: o objetivo do tratamento acústico é dar qualidade acústica ao ambiente (AUDIOACADEMY, 2019?), ou seja, procura-se realçar ou diminuir frequências específicas, de modo a tornar a propagação de som naquele ambiente mais eficiente para o seu uso. É o que se faz, por exemplo, dentro de um estúdio, para que os músicos consigam escutar o que estão tocando, mas para que também não haja muita reverberação (o chamado “eco”) que faça a audição ficar confusa; O isolamento acústico já é o trabalho do qual trata a NBR citada no parágrafo anterior, seu objetivo é a separação sonora de dois ambientes (AUDIOACADEMY, 2019?).

Como o som é uma onda mecânica, podemos dizer que qualquer material sólido pode, de certa forma, trabalhar como uma barreira acústica, pois bloqueia o caminho da onda ( que é incapaz de desviar), e o resultado que se ouve é o que foi conduzido pelo

material, que é em quantidade menor do que o que saiu da fonte. Todo material tem um coeficiente de redução sonora (NRC), e os que tem maior coeficiente são chamados de isolantes acústicos. Alguns destes materiais são a lã de rocha, lã de vidro, espuma de poliuretano ou melamina (tipo mais comum), entre outros. Além do coeficiente de isolamento, outro fator que influencia muito na eficiência de um isolante acústico é o formato, afinal isso altera a forma como o material reflete (“devolve” à direção de origem) e difrata ( obriga a se espalhar até encontrar uma beirada ou buraco da barreira) a onda sonora: as espumas de poliuretano, por exemplo, são vendidas em placas retangulares que contém, em uma de suas faces, várias deformações em forma de cunha, criando “armadilhas” para as ondas sonoras, de modo que muitas não são refletidas para fora da espuma, e sim para outra região da mesma, e com a difração a onda vai atingindo mais cunhas, de forma que uma porção bem menor da onda consegue dar a volta na barreira.



Figura 1.1: Espuma Acústica

Uma das grandes responsáveis pelas falhas na efetividade de uma barreira acústica é justamente a difração: é impossível uma barreira de tamanho infinito, e mesmo que um ambiente seja completamente coberto por uma barreira, sempre haverá um espaço (mesmo que mínimo) entre estas, incluindo, por exemplo, o chão. Desta forma, quando a onda difrata, sempre encontrará uma maneira de escapar da barreira. Começou-se a pensar, então, alternativas para isolamento acústico que fossem melhores que as barreiras acústicas clássicas. A primeira opção de substituto para as barreiras acústicas clássicas foram os chamados cristais acústicos, que podem ser definidos como materiais heterogêneos que consistem de um arranjo periódico de materiais isolantes, em um meio líquido com diferentes propriedades físicas (Rubio et. al, 2016). Neste tipo de material, o principal meio de atenuação de sons é a lei de Bragg, que fala sobre a difração de ondas em cristais, devido à periodicidade com que o processo ocorre, criando picos de atenuação sonora chamados de Lacunas de banda (Band Gaps, em inglês). No uso destes cristais sônicos como barreiras acústicas ( que são ditos de duas dimensões, pois a periodicidade do arranjo de isolantes é dada somente em duas direções), os isolantes mais comumente tem

formato cilíndrico, devido às suas propriedades simétricas (Rubio et al., 2016). Ainda sim, mesmo com maior eficiência que as barreiras tradicionais, tentou-se estudar uma forma de aumentar mais ainda a atenuação sonora. O resultado foi o uso de geometria fractal.

## 1.2 O fractal e a Barreira Acústica

O estudo de fractais relacionados a ondas não é uma novidade. O matemático polonês Benoit Mandelbrot, um dos mais importantes estudiosos da área e um dos criadores da área de geometria fractal (Telegraph, 2010) teve uma de suas primeiras experiências com fractais justamente analisando ondas. Na década de 1960, o matemático era pesquisador na IBM (International Business Machines Corporation), uma das mais importantes empresas de informática do mundo. A pesquisa de Mandelbrot envolvia analisar ruídos eletrônicos que por vezes atrapalhavam as transmissões da IBM, causando erros. Apesar de não compreenderem a natureza dos erros, estes ruídos ocorriam em grupos, de forma que um período sem erros seria seguido de um período com vários erros. Ao examinar esses agrupamentos, percebeu que formavam padrões e que, quanto menor era o intervalo analisado, maior era a complexidade (fenômeno que seria chamado futuramente de autossimilaridade). Ou seja, uma hora poderia passar sem erros e na hora seguinte haveriam erros, mas ao analisar essa hora que teve erros, separando-a em intervalos de vinte minutos, teríamos o mesmo agrupamento, ou seja, vinte minutos com erros e vinte minutos sem.

A aplicação de geometria fractal e suas propriedades nos cristais sônicos (chamados de cristais de segunda geração, devido ao fato de serem um upgrade dos originais) se dá na disposição do material isolante dentro dos cristais. Um exemplo é redistribuição desse material, que originalmente estava em formato triangular, para um formato seguindo o Triângulo de Sierpinski, ou seja, retirando alguns cilindros isolantes para ficar com os “vãos” deste fractal. Na figura abaixo temos o processo, sendo o da esquerda um cristal sônico original (SC) e um cristal rearranjado seguindo o Triângulo de Sierpinski em sua quinta iteração (por isso chamado de Estrutura Quase-Fractal – QFS).

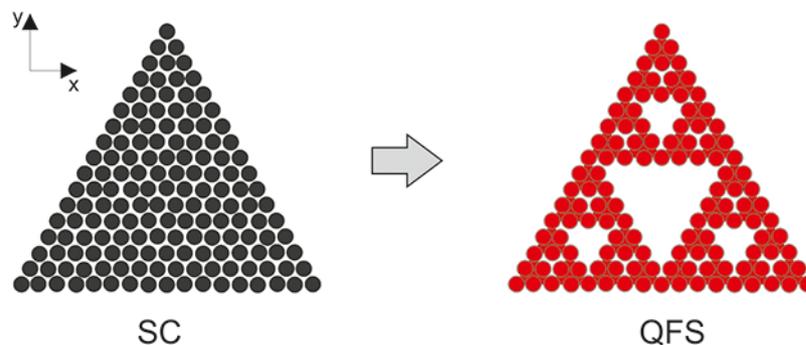


Figura 1.2: Processo de barreiras acústicas

Comparando o cristal sônico original (SC) com uma média de um cristal sônico

em forma quase-fractal experimental (QFSexp) que envolve os tamanhos comercializados de cilindros isolantes e um cristal sônico quase-fractal com melhor resultado possível (QFSMax), obtém-se a seguinte tabela, que trata do número de isolantes (scatterers), a fração de preenchimento (ou seja, quanto da estrutura é preenchido por isolantes – filling fraction – ff) e a área de atenuação (calculado multiplicando a atenuação em decibéis pela atenuação em Hertz):

Sample	No. of scatterers	ff (%)	AA (Hz-dB)
SC	136	36	14,705
QFS <sub>Max</sub>	60	45.8	51,048
QFS <sub>Exp</sub>	60	33.24	42,391

Figura 1.3: Tabela comparativa dos modelos

A partir disso vemos que com o uso da geometria fractal, temos uso de menos material isolante (que é vantajoso por ser mais barato), com uma porcentagem de preenchimento próxima (ou seja, apesar de usar menos material, ele está melhor distribuído pelo cristal, de modo a preencher aproximadamente em mesma proporção) e com uma área de atenuação muito maior (ou seja, mais efetiva), chegando entre 3 e 4 vezes a área de atenuação original. Desta forma obtemos um produto melhor com menor gasto em material.

Referências: [10, 9, 5, 2, 6]

# Capítulo 2

## Aplicação 2

*Gawed Lexidor*

O câncer de mama é um tumor maligno que se desenvolve como consequência de alterações genéticas nas células da mama, que passam a se dividir descontroladamente, gerando um crescimento anormal das células da mama. É a principal causa de morte por câncer entre as mulheres em todo o mundo, mesmo os números mostrando que existe uma grande chance de cura quando diagnosticado em seu estágio inicial. Muitas mulheres têm receio de procurar ajuda médica para realizar exames rotineiros, comprometendo o diagnóstico precoce e, conseqüentemente, a cura, pois quanto mais tempo demora o diagnóstico menores são as chances de cura.

### 2.1 Como o fractal é utilizado na triagem do câncer de mama

O fractal para o câncer de mama é utilizado para diagnosticar e diferenciar alterações malignas, pois permite analisar as mudanças de padrão na mama, sendo possível diferenciar tumores benignos de malignos.

O fractal é usado também para:

1. Detectar clusters de microcalcificações: Utiliza a dimensão fractal em imagens termográficas para detectar uma possível diferença entre os padrões de tumores de mama (maligno e benigno). Primeiramente, foram segmentadas as imagens da mama com o algoritmo Fuzzy C-Means Clustering. Em seguida, foram identificadas regiões mais quentes para 41 cada imagem, consideradas regiões cancerígenas, e a dimensão fractal para cada região. Assim, estudos concluíram que a dimensão fractal dos tumores benignos e malignos fornecem padrões de valores bem diferentes e pode auxiliar no aumento da confiabilidade de diagnósticos;
2. Classificar com precisão o tecido mamário com tumores benignos;

3. Método Box Counting: Para o cálculo da dimensão fractal, foi utilizado o método Box-Counting, e é popular por ser considerado simples. Esse método leva em consideração uma quantidade de quadrados utilizada para cobrir uma imagem, e, depois, a relação desses quadrados com os quadrados do fractal que será calculado. Esse tipo de cálculo contribui na identificação do crescimento do tumor.

Referências: [8]

# Capítulo 3

## Aplicação 3

*Nathaly Stefanovicz*

Neste capítulo apresentamos uma aplicação de fractais muito utilizada no mercado financeiro. Ela se aplica em todos os ativos negociados livremente, passivos, ou bens (ações, obrigações, petróleo, ouro, etc.), a **Teoria das Curvas de Elliott**. Proposta pelo contador e especialista em negócios Ralph Nelson Elliott em seu estudo intitulado "The Wave Principle", publicado em 1938, a teoria representa um desenvolvimento da bem conhecida teoria *Dow*<sup>1</sup>. Depois que ele se aposentou, e uma doença grave tinha sido descoberta em seu organismo, Elliott começou a observar o mercado de ações e seus gráficos na esperança de entender o comportamento do mercado. Depois de ter realizado um grande trabalho, ele concluiu que o mercado é um produto da psicologia predominante das massas, seguido de algumas leis.

### 3.1 Teoria das Curvas de Elliott

Pertencente a um dos campos de atuação da Análise Gráfica, a Teoria das Ondas de Elliott é uma metodologia que visa mapear os ciclos de uma série histórica de preços de um instrumento financeiro<sup>2</sup> (objeto), afim de se obter um entendimento da dinâmica dos preços no momento presente, projetar futuros possíveis cenários, e, conseqüentemente, auxiliar na tomada de decisão de compra ou venda. Inclusive existem softwares de análise técnica que conseguem ajudar a rastrear automaticamente esses ciclos. A Teoria é baseada em certas leis periódicas da psicologia do comportamento humano. De acordo com seu criador, o comportamento dos objetos pode ser claramente estimado e mostrado graficamente como ondas. Quando estamos falando em *ondas*, estamos nos referindo a um movimento de preço explícito, isto é, quedas, crescimentos e/ou estabilizações das variações.

Para entendermos melhor como funciona as tomadas de decisão baseadas nas curvas, precisamos entender o que a teoria diz a respeito dos padrões geométricos (fractais)

---

<sup>1</sup>Teoria que aborda a movimentação dos preços de ações e fornece uma base técnica para sua análise.

<sup>2</sup>Ativos negociados livremente, passivos ou bens.

observados. Elliott propõe que todos os movimentos dos preços no mercados, estão divididos em algumas características for mando assim o padrão denominado por **12345abc**, sendo elas divididas em:

1. Cinco ondas na direção da tendência principal - Ondas 1 a 5;
2. Três ondas de correção - Ondas a, b, c.

Além disso, as ondas possuem um subdivisão que as caracteriza afim de definir seu comportamento:

1. Impulsos que criam uma tendência direcionada (alta ou baixa) e fazem com que o mercado se mova de forma muito ativa - Ondas 1, 3, 5, a, c;
2. Correções (reversões) que se caracterizam por serem contra a tendência - Ondas 2, 4, b.

Em sua Teoria, Elliott baseou-se no princípio da subdivisão das ondas, ou seja, da similaridade entre as ondas menores das quais faziam parte de outras onda maior que a englobava. Resumidamente, o princípio básico de fractais. Para a Teoria cada onda de impulso é constituída por cinco ondas menores e cada onda de correção (contra a tendência) é composta por três ondas. O ciclo mais longo, de acordo com Elliott, é chamado Grand Supercycle, que é composto de 8 ondas Súper-cíclicas. Estas últimas são cada uma composta por oito ciclos.

## 3.2 Padrão Geométrico ou Fractal das Ondas de Elliott

Como comentado anteriormente, o padrão **12345abc**, conhecido na pelo Teoria das Ondas de Elliott, do qual segue os 4 princípios propostos por Elliott, apresentam o seguinte padrão geométrico:

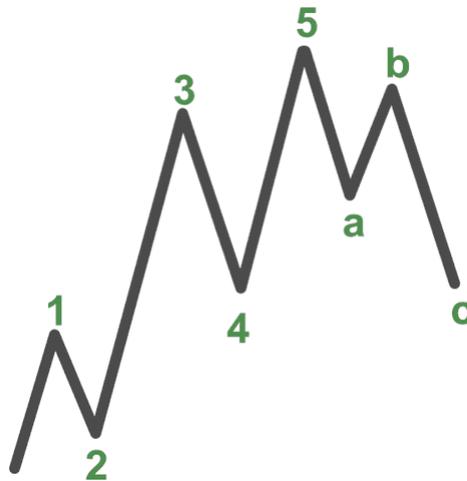


Figura 3.1: Padrão 12345abc das Ondas de Elliott

É claro que a Figura 1.1 é um padrão "perfeito", na prática, os gráficos dos mercados de capitais são formados por padrões imperfeitos. E isso significa que precisamos utilizar essa referência "perfeita" para fazermos o mapeamento do padrão imperfeito.

Podemos nos perguntar por quê esses objetos apresentam esse padrão, mas tais padrões nada mais são do que reflexos dos padrões comportamentais gerados pelo emocional e racional do coletivo<sup>1</sup>. Por isso, um padrão gráfico tende a se repetir ao longo do tempo da mesma forma que o padrão comportamental se repete em um indivíduo ou coletivo.

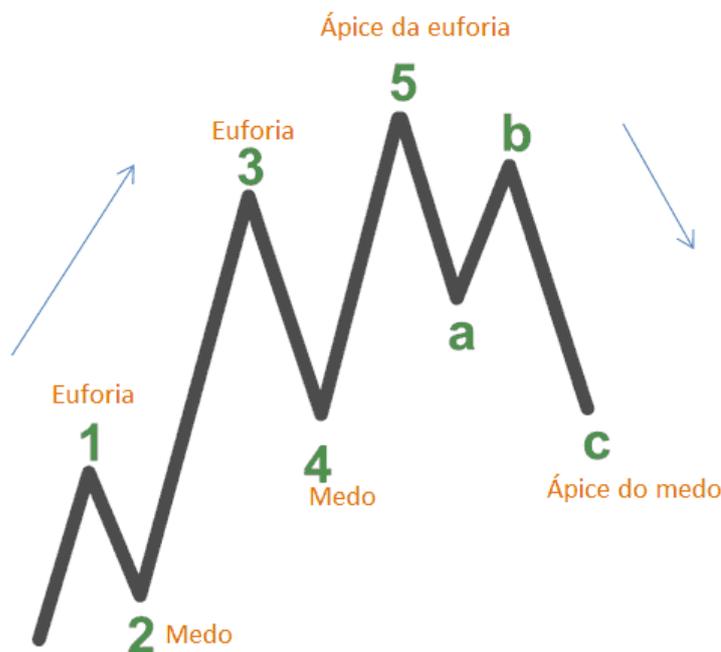


Figura 3.2: Padrões comportamentais nas Ondas de Elliott

A tendência é motivada mais pela razão enquanto que as oscilações intermediárias são ruídos causados principalmente pelas emoções.

Cálculos dentro da Teoria das Ondas de Elliott se assemelham a um roteiro. Cada onda tem um conjunto de características. Estas características são baseadas em matrizes de comportamento do mercado.

Na Teoria das Ondas de Elliott, uma atenção especial é dada à descrição individual de cada onda. Além disso, há certas leis usadas para produzir ondas proporcionais de Elliott (Figura 1.3). Essas leis permitem uma definição adequada de onde a onda começa e quanto tempo ela dura. Os comprimentos da onda são medidos de cima para baixo.

As relações clássicas entre as ondas são confirmadas por ondas reais com 10% de margem de erro. Tal erro pode ser explicado através do curto prazo de influências de alguns fatores técnicos, externos ou fundamentais. Em conjunto, os dados são muito relacionados. O importante é que todas as relações entre todas as ondas podem ter valores de **0,382**, **0,50**, **0,618**, **1,618**. Com isso, podemos calcular as relações entre alturas de

<sup>1</sup>Participantes do mercado.

onda e comprimentos de onda.

Onda	Relações clássicas entre as ondas
1	-
2	0.382, 0.5 ou 0.618 do comprimento da Onda 1
3	1.618 ou 2.618 do comprimento da Onda 1
4	0.382 ou 0.5 do comprimento da Onda 1
5	0.382, 0.5 ou 0.618 do comprimento da Onda 1
a	0.382, 0.5 ou 0.618 do comprimento da Onda 1
b	0.382 ou 0.5 do comprimento da Onda a
c	1.618, 0.618 ou 0.5 do comprimento da Onda a

Figura 3.3: Leias de proporção das Ondas de Elliott

Podemos então observar esses padrões em 99% dos gráficos de ativos financeiros. Como o exemplo abaixo, podemos perceber os padrões mesmo que difícil de identificar sem nenhuma ferramenta:

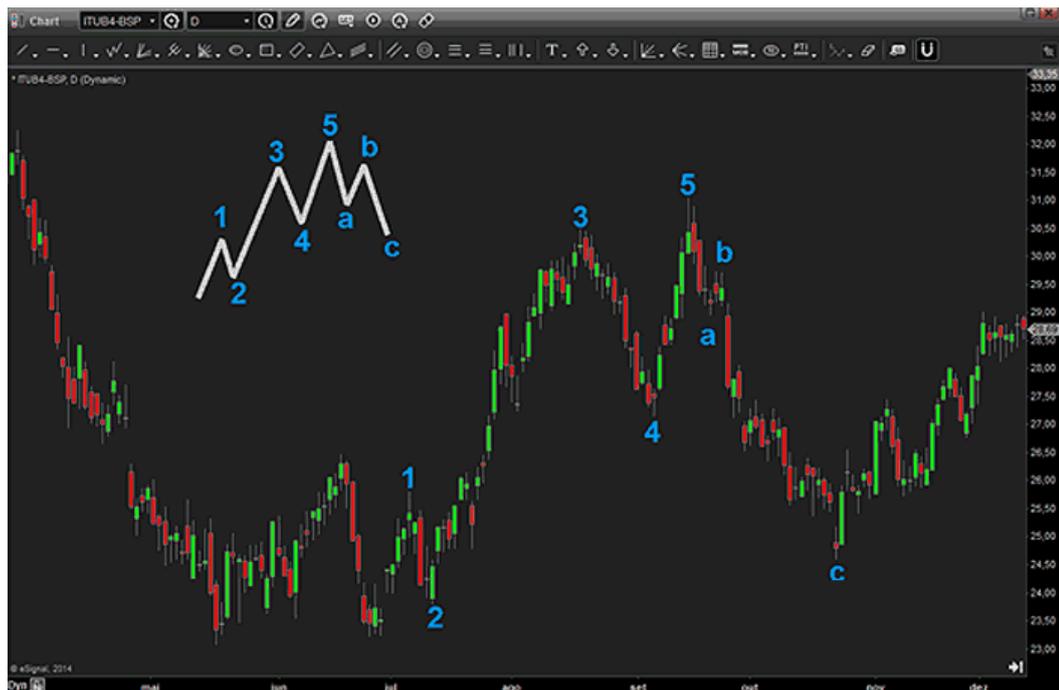


Figura 3.4: ITUB4 no gráfico diários com o padrão das Ondas de Elliott

Como podemos observar não é fácil identificar os padrões. Existe uma certa dificuldade em dizer quando o padrão começa e quando ele termina. Com a ajuda de ferramentas para análise gráfica financeira, conseguimos aplicar as regras de proporções para identificar inícios e términos das ondas.

Não é difícil notar que esses padrões seguem uma "leia de formação" da qual os define de maneira a generalizar o comportamento total da tendência. E essa é a geometria fractal das Ondas de Elliott, onde cada fenômeno caótico tem seu padrão característico

que se repete, também conhecido como fractal. No mercado de capitais essa repetição em diferentes escalas acaba ocasionando a formação de uma figura mais complexa:

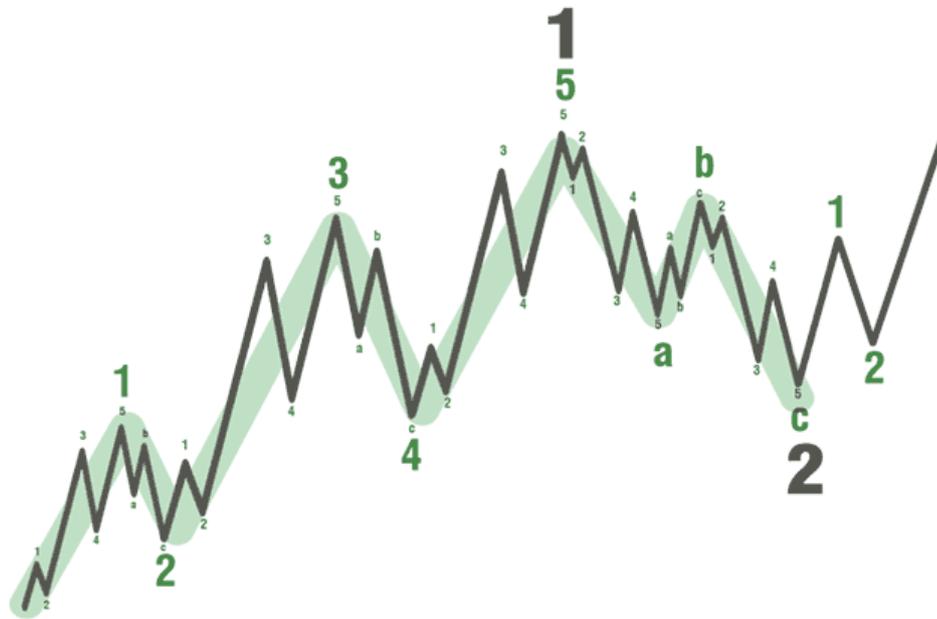


Figura 3.5: Padrão fractal das Ondas de Elliott

*Note que o padrão 12345abc se repete várias vezes pra cima, para baixo e em tamanhos diferentes.*

A imagem acima, novamente, é um padrão perfeito onde seu objetivo principal é ser usado como referência no momento de mapeamento de um ativo real ou elaborar estratégias. Abaixo podemos ver um mapeamento real das Ondas de Elliott em 2 níveis da ação BBDC4:



Figura 3.6: Mapeamento real do padrão fractal das Ondas de Elliott

### 3.3 Por que fazer o mapeamento das Ondas de Elliott?

O mapeamento das Ondas de Elliott é feito em um gráfico justamento para saber em que fase o preço está dentro do contexto do fractal, afim de montar uma estratégia apostando na alta ou na baixa. Isto é, através do mapeamento será possível, com ressalvas, prever o comportamento do preço para tomadas de decisões mais precisas em relação a compra e venda dos ativos. Em termos práticos, vejamos alguns exemplos:

1. Após uma análise técnica com foco nas Ondas de Elliot de um ativo, todo o ferramental está indicando que a atual queda tem grandes chances de ser o final de uma onda 4, então qual seria o movimento mais provável para o preço no futuro após o término da onde 4?

Exatamente, o movimento mais provável seria na direção para cima para construir a onda 5.

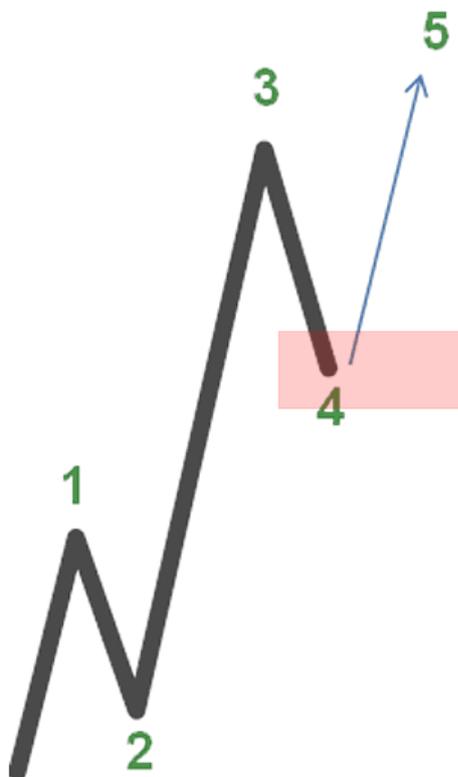


Figura 3.7: Resolução

2. As imagens abaixo mostram o mapeamento sendo aplicado na prática à Brasil Foods (BRFS3):

No gráfico 1 é feito o mapeamento das ondas, dando o início e fim de cada onda. Sendo assim junto com a análise nos levam a duas possibilidades prováveis. Porém com a Teoria das Ondas de Elliott é possível facilmente prever o comportamento do gráfico para os períodos futuros.

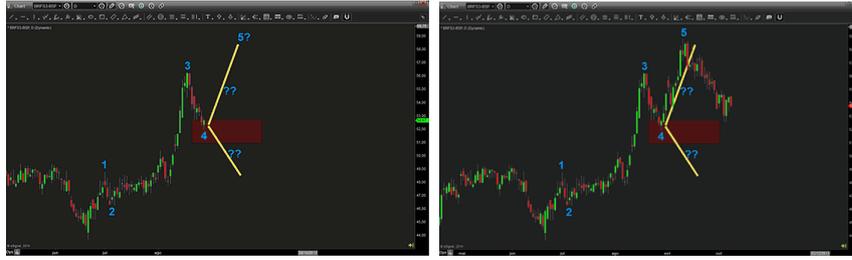


Figura 3.8: Gráfico 1

Em ambos os exemplos é possível montar estratégias de compra e venda em momentos propícios à lucro. Esse princípio mostra como é possível reverter o cenário de tendência alta e tirar bons lucros mesmo com a situação.

Referências: [1, 7, 3, 4]

# Referências Bibliográficas

- [1] 10 segredos sobre a teoria das ondas de eliott que todos os traders deveriam saber: Um guia indispensável.
- [2] Absorção sonora x isolamento acústico: entenda as diferenças.
- [3] Fractais e seu uso nos gráficos de ações.
- [4] Os 5 padroes fractais -=forex simples=-.
- [5] Qual a diferença entre tratamento acústico e isolamento acústico?
- [6] Resumo de reflexão, refração e difração - física.
- [7] Teoria das ondas de elliot.
- [8] A. V. Jonas. Estudo do grau de risco de câncer de mama utilizando a dimensão fractal em imagens infravermelhas. Technical report, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, May 2015.
- [9] P. F. Juan and A. Davi. *Manual ProAcústica sobre a Norma de Desempenho Guia prático sobre cada uma das partes relacionadas à área de acústica nas edificações da Norma ABNT NBR 15575:2013 Edificações habitacionais - Desempenho*. Associação Brasileira para a Qualidade Acustica, Brasil, 2013.
- [10] S. V. Juan C. Pilar B. Francisco R. Constanza, C. Sergio and U. Antonio. Chapter 6open acoustic barriers: A new attenuation mechanism. *Intech*, 2016.