Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Bruno Cesar Lopes
Danielle Maceno
Flavio Carvalho

Árvore Fractal

Curitiba
2019

1 Fractais

Os fractais, a grosso modo, são figuras geométricas não Euclidianas, que possuem uma estrutura fina, auto-similaridade, simplicidade na lei de formação e uma difícil descrição analítica. Os fractais são comumente encontrados na natureza, como por exemplo em plantas, tecidos de órgãos, nas nuvens, flocos de gelo. Porém esses fractais são pouco estudados e abordados nos cursos de Licenciatura, ainda menos no ensino básico.

Isso ocorra talvez por conta da complexidade de estudá-los, exigindo uma matemática mais avançada, densa e também ferramentas tecnológicas como softwares de computador. Assim, os fractais mais famosos e abordados nos cursos são de formação geométrico simples, como por exemplo, o conjunto de Cantor, a curva de Koch, o triângulo de Sierpinski, entre outros.

Essas figuras geométricas chamam a atenção por suas formas, que parecem despertar algo que nos impulsiona para dentro, para um infinito interno. Mas a pergunta é: será que são apenas figuras bonitas, ou há algum padrão matemático também de grande beleza? A resposta é sim. Interessantemente o que define uma figura ser fractal não é o aspecto de auto-similaridade, ou outros aspectos visíveis, mas sim um aspecto puramente matemático, um conceito: dimensão.

As figuras possuem dois conceitos diferentes de dimensão: a topológica e a dimensão espacial. A primeira consiste em ponto (dimensão zero), reta (dimensão um), plano (dimensão dois), sólido (dimensão 3); a segunda é "o espaço"que a figura realmente ocupa. A seguir temos uma figura que mostra uma comparação entre elas:

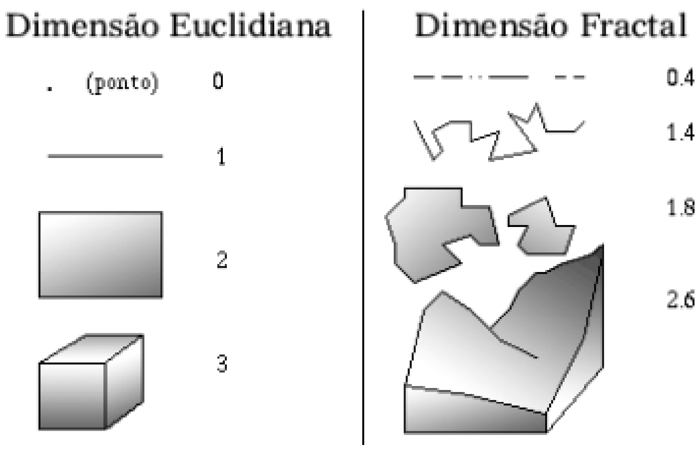

Figura 1 – Comparação entre a dimensão espacial e a dimensão fractal (SOUZA, 2019)

Para tentar elucidar tomemos o triângulo de Sierpinski, após infinitas iterações a figura que possuía um valor de área, se tornou apenas um emaranhado de segmentos, cujo formam uma curva (possuindo começo e fim). Assim sua dimensão topológica é igual a 1. Por outro lado se formos ver este emaranhado de segmentos, parece que ocupa quase o equivalente a uma área, portanto sua dimensão espacial é maior que 1.

Para calcular esta dimensão existem dois métodos. Mas vamos aplicar inicialmente um deles chamado de auto-similaridade, o qual utilizamos a seguinte fórmula:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{R}}$$

Onde N é o número figuras após iteração, R é o fator de redução e D é a dimensão. Assim a dimensão do Triângulo de Sierpinski é:

$$D = \frac{\log 3}{\log \frac{1}{2}} \cong 1,52$$

Desta forma vemos que realmente a dimensão espacial é maior que a dimensão topológica, e isso não é coincidência. De fato, isso é sempre verdade nos fractais, ou seja, uma figura é um fractal toda vez que sua dimensão espacial for estritamente maior que sua dimensão topológica.

Já o outro método para calcular a dimensão chamamos de contagem de caixas, o qual é usado para figuras sem auto-similaridade.Tal método conforme descreve Arsie é da seguinte forma:

"...consiste em cobrir a figura com uma malha de quadrículas de lado l, e contar quantas possuem ao menos um ponto da figura. Representamos esse valor por N. Seja δ o lado da moldura que escolhemos para inserir a figura. Consideremos um quadrado cheio de lado δ. Se dividirmos em quatro quadrículas iguais de lado l, cada uma delas terá a metade do lado do quadrado inicial. E obtemos N=4 e $\frac{\delta}{l} = 2$. Como a dimensão do quadrado é D=2 temos a relação:

$$N = \left(\frac{\delta}{l}\right)^D$$

Mas para que a determinação de D seja precisa, é necessário que a malha seja muito fina, isto é, que o lado das quadrículas seja tão pequeno quanto se queira. Podemos definir D aplicando o limite quando o lado tende a zero:

$$D = \lim_{l \to 0} \frac{\log N}{\log \frac{\delta}{l}}$$

" (ARSIE; RIBEIRO, 2009)

Um outro fractal não muito abordado, mas que possui várias aplicações na medicina por exemplo, e também enorme potencial para trabalhar geometria no ensino básico é a árvore fractal. Quando analisamos por exemplo os galhos de uma árvore vemos que de um galho central surgem galhos secundários e dos secundários surgem outros e assim por diante, e também que normalmente os galhos vão diminuindo seu tamanho, ou grossura. Então justamente, uma árvore fractal é uma figura formada por processo geométrico simples (ramificação), possui auto-similaridade, estrutura fina.

Existem diversas árvores fractais, algumas com 2 ramificações, outras com 5, outras com 27, ou seja podem ter n ramificações. Também podemos explorar o ângulo que esses ramos fazem com seu galho inicial e o tamanho do ramo. Essas modificações irão alterar o aspecto da árvore e sua dimensão espacial. Veja a seguir algumas imagens.

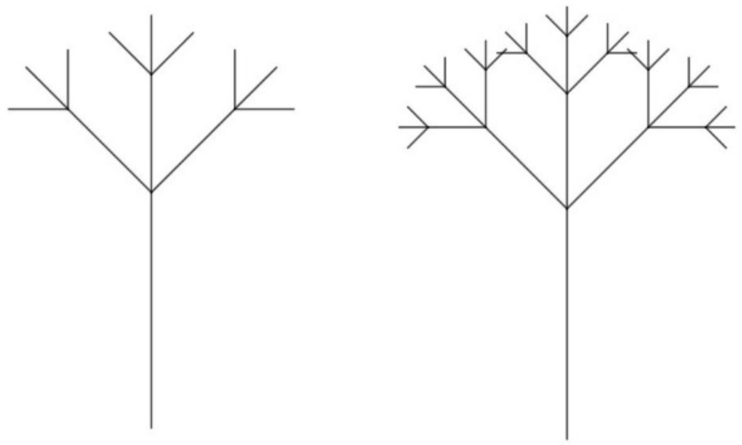

Figura 2 – Árvore fractal com 3 ramificações *(Fonte: Própria)*

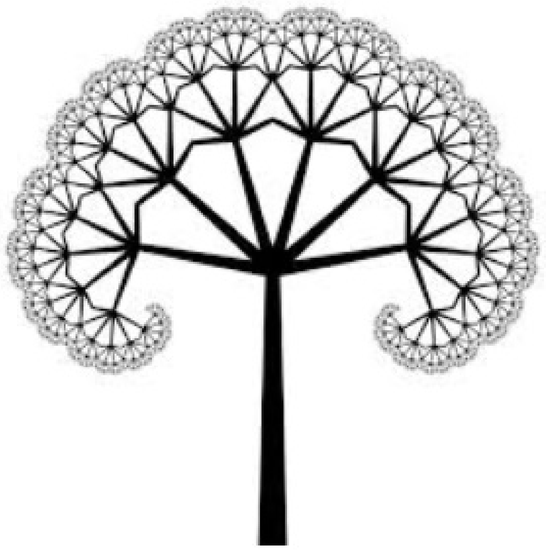

Figura 3 – Árvore fractal com 5 ramificações

Fonte: https://www.rgbstock.com.br/photo/nlvstHS/Fractal

A dimensão topológica das árvores fractais são iguais à 1. Já a dimensão espacial será estritamente maior. Vejamos a seguir um exemplo do cálculo da dimensão fractal pelo método da contagem de caixas conforme a Figura 4.

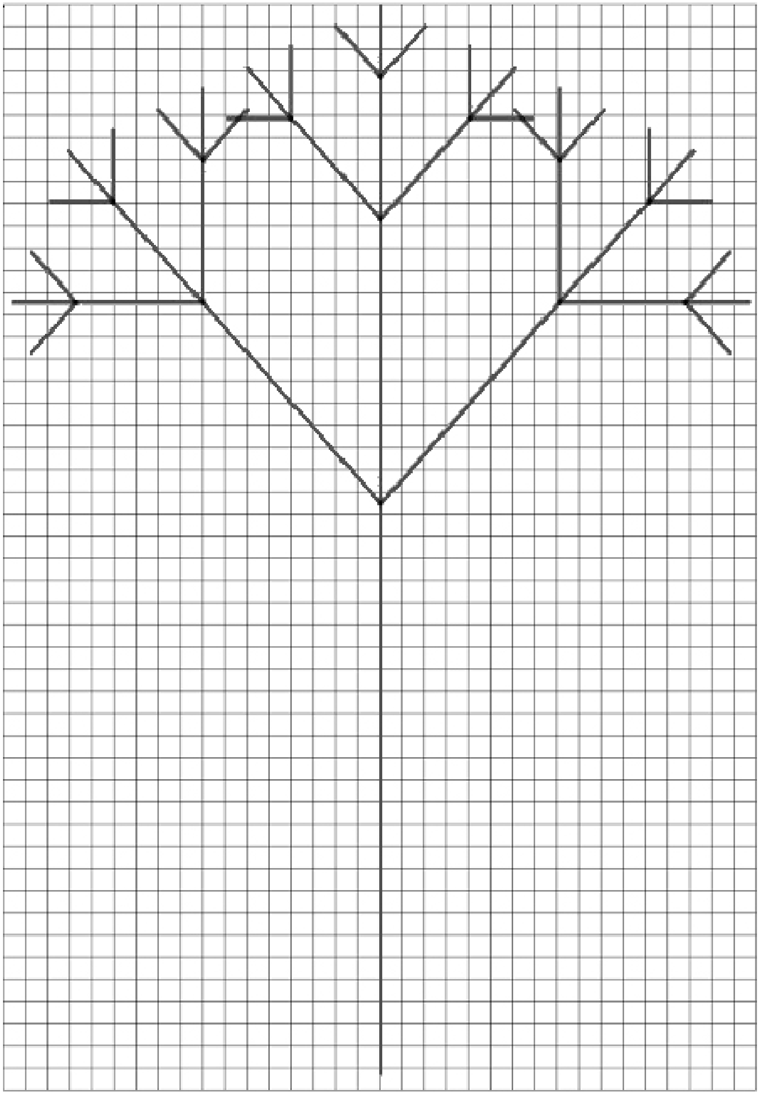

Figura 4 – Árvore fractal com 5 ramificações *(Fonte: Própria)*

Verificamos que

$$N = 200$$

$$\delta = 647px$$

$$l = 12px$$

Portanto

$$D = \frac{\log 200}{\log \frac{647}{12}}$$

$$D \cong 1,32$$

Veja que a dimensão espacial realmente é maior que a dimensão topológica, também é interessante observar duas coisas: primeiro que quanto mais ramificações a árvore possuir maior será sua dimensão, pois aumentará o valor de N e log é função crescente, e a segunda que quanto mais próximo de zero for o valor de , mais preciso será o valor da dimensão espacial. Feito isto vamos explorar um pouco sobre o comprimento dos segmentos durante as iterações considerando o segmento inicial igual a L, duas ramificações e fator de redução igual à 2.

Iteração	N° de segmentos	Comprimento segmento
0	1	L
1	3	1/2L
2	7	1/4L
3	15	1/8L
...	...	...
n	2^{n+1}	$\frac{1}{2^n}L$

Portanto é fácil ver que o comprimento dos segmentos de iteração n com n tendendo à infinito ficarão próximos de zero. Porém o número de segmentos irá para infinito. Sob uma perspectiva didática para a educação básica, vemos que as árvores fractais possuem diversos pontos positivos para a abordagem nesta fase, isso pois sua construção é muito simples, a sua diversidade que nos permite trabalhar ângulos, medidas de comprimento e proporção, bem como generalizações, buscando afinar ainda mais o conhecimento matemático dos alunos.

Para elucidar essa diversidade da qual temos falado, mostramos a seguir um fractal denominado, árvore pitagórica, os quais possibilitam a abordagem de conteúdos como o próprio teorema de Pitágoras, equivalência de triângulos, e outras abordagens geométricas.

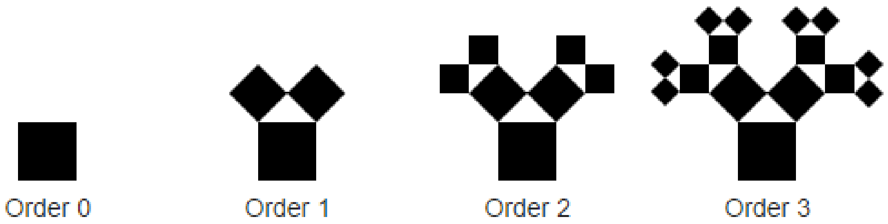

Figura 5 – Iterações da construção da Árvore Pitagórica com triângulo equilátero

(Fonte:https://semsofismos.wordpress.com/2014/09/29/trabalho-i-matematica-e-arvores)

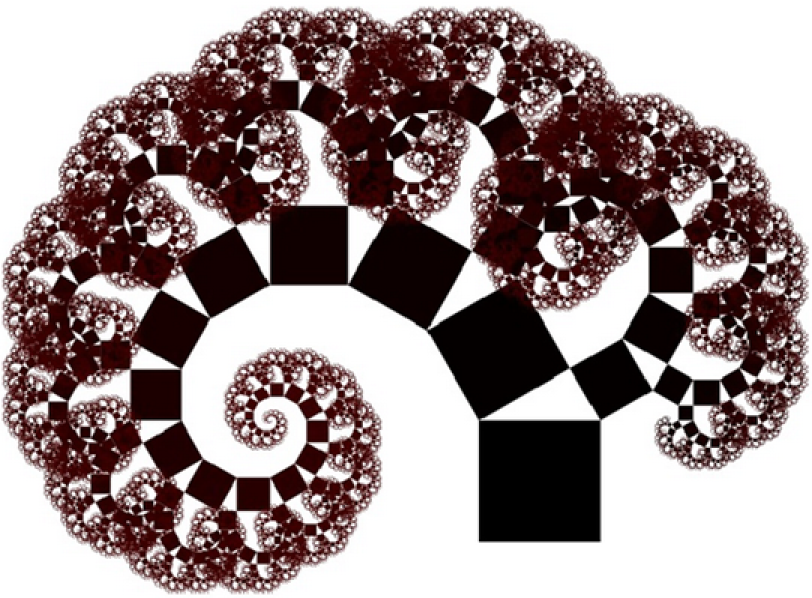

Figura 6 – Árvore pitagórica por triângulo retângulo escaleno (NICOLA et al., 2013)

2 Considerações

As pesquisas em torno dos fractais e nos mostraram o grande potencial que tais figuras possuem, verificamos diversas aplicações como cita Rabay (2003):

"No desenvolvimento de tecnologias podemos citar a utilização de antenas para equipamentos móveis, que além da otimização de espaço aumentam a capacidade de transmissão,... Na agricultura a análise de solos, nebulosidade da área, movimentos dos rios e estruturas de vários cristais podem ser modelados por fractais.

Nas ciências médicas e biológicas, encontramos diversos exemplos, ... como por exemplo, na fisiologia animal, as ramificações pulmonares, veias e artérias seguem padrões de ramificações,... A análise de imagens diagnóstico precoce de câncer e do Mal de Alzheimer pode ser feita através de modelagem utilizando-se os fractais." (RABAY et al., 2013)

Além disso, podemos utilizar essas figuras fascinantes para o desenvolvimento de diversos conteúdos na educação básica, podendo explorá-los com o apoio de software como O GeoGebra e o Carmetal, possibilitando ao aluno a construção de seus próprios fractais, a explorar as propriedades, a verificar relações, proporcionando assim uma aprendizagem interessante e significativa para o aluno.

Referências

ARSIE, K. C.; RIBEIRO, A. A. Dimensão espacial. *Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, Outubro de*, 2009.

NICOLA, C. H. et al. Conhecendo fractal no ensino médio-árvore pitagórica. Universidade Federal de São Carlos, 2013.

RABAY, Y. S. F. et al. Estudo e aplicações da geometria fractal. Universidade Federal da Paraíba, 2013.

SOUZA, L. R. Geometria fractal: Uma proposta de sequência didática para o ensino de progressões geométricas. 2019.