UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CMM102 - Tópicos de Matemática 2: Fractais
Professora Elizabeth Wegner Karas
Trabalho em grupos

Curitiba 2019

Sumário

Capítulo 1

Fractal e Caleidoscópio

Deborah Silva Borges
Letícia Ferreira Gomes
Rhuana Elias Martins Aal
Stefani Vicoski Marques

Neste capítulo será apresentado uma proposta metodológica para introduzir a Geometria Fractal na Educação Básica. Os fractais formam figuras de grande beleza, de forma que é possível discutir sobre a percepção de padrões geométricos, a percepção do infinito e sobre fenômenos naturais que apresentam características de Geometria Fractal.

Nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática (DCEBM, 2008), temos, dentre os conteúdos de Geometria, que no nível do Ensino Fundamental o aluno deve compreender

> noções de geometrias não-euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais. (DCEBM, 2008, p. 56)

E no nível do Ensino Médio

> aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não-euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica. Na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades. (DCEBM, 2008, p. 57)

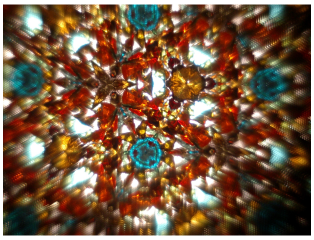
De forma que a abordagem dessa Geometria não se limita apenas a esses conteúdos elencados, "desde que explore conceitos básicos, o professor tem a liberdade de investigar e realizar outras abordagens" (DCEBM, 2008, p. 57). Por fim, é indicado para alunos da 7ª série/8º ano do Ensino Fundamental que "conheçam os fractais através da visualização e manipulação de materiais e discutam suas propriedades" (DCEBM, 2008, p. 79).

Portanto, levando em conta tudo o que foi dito anteriormente, será introduzido a noção de Fractal a partir de um objeto chamado caleidoscópio, com o objetivo de discutir com os alunos se a Geometria Fractal pode estar relacionada com as figuras geradas por um caleidoscópio, e discutir os padrões que envolvem cada uma das figuras, tanto das imagens geradas pelo caleidoscópio quanto as dos fractais.

Além disso, iremos utilizar o *software* GeoGebra para realizar a construção das bases de um caleidoscópio de forma mais prática e lúdica, e iremos abordar algumas questões a respeito de simetria.

1.1 O que é um caleidoscópio?

Um caleidoscópio é um instrumento óptico que serve para criar efeitos visuais simétricos com o auxílio de um conjunto de espelhos e vidros coloridos, de outra forma, é um instrumento formado pela articulação de dois ou mais espelhos, devidamente ajustados, de modo a oferecer imagens repetidas e perfeitas, como na figura a seguir.



A origem da palavra caleidoscópio é dada por kalos, que significa "belo" ou "bonito", eidos, querendo dizer "imagem" ou "figura". A palavra scope também está incluída nesta história e significa "olhar" (para), ou então apenas "observar".

Tal objeto tem como seu criador o cientista escocês David Brewster (1781 -1868), que o inventou em 1816, onde, inicialmente, o caleidoscópio começou a ser produzido e vendido como um brinquedo.

Como dito anteriormente, tal aparelho é usado para obtenção de imagens através de espelhos inclinados em determinado ângulo. É comum encontrar caleidoscópios num formato cilíndrico, com um fundo de vidro e dispostos três espelhos no interior, em forma de triângulo um em relação ao outro, sendo que, em cada movimento giratório, distintas combinações são produzidas, podendo ser vistas por meio de uma abertura numa de suas pontas. De outra forma, ao visualizar o interior do cilindro, através de um furo localizado na tampa do caleidoscópio e rolando lentamente o objeto, imagens são formadas a partir do reflexo no interior do objeto criado pelos espelhos inclinados.

Atualmente um caleidoscópio serve tanto para brincar e se divertir quanto trabalhar conceitos de reflexão da luz e de simetria, além de fornecer padrões que podem ser utilizados em disciplinas como desenho geométrico.

"Os caleidoscópios podem ser utilizados para desenvolver a percepção espacial, habilidades gráficas, estimular a criatividade, motivar o estudo e exploração de propriedades de polígonos e de simetria reflexional através das transformações geométricas" (GOUVÊA, MURARI; 2004).

1.1.1 Caleidoscópio com 3 espelhos

Focaremos no caleidoscópio formado por três espelhos, que formam um prisma triangular, sendo que a imagem de um dos espelhos produzem novas imagens nos outros dois.

Segundo Buske (2007), "para que se tenham imagens coincidentes e repetição perfeita das figuras obtidas, cada ângulo deve satisfazer a condição de o dobro ser divisor de 360^o", portanto, sendo $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ os ângulos dos espelhos, devemos ter:

$$\frac{\pi}{\hat{a}} = n_1; \frac{\pi}{\hat{b}} = n_2; \frac{\pi}{\hat{c}} = n_3$$

como $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \pi$ temos os possíveis valores para $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$: $(60^o, 60^o, 60^o)$, $(90^o,45^o,45^o)$, $(90^o,60^o,30^o)$. Sendo assim teremos, para cada tripla, o que chamamos de caleidoscópio equilátero, isósceles e escaleno, respectivamente.

1.2 Construção de um caleidoscópio

Para construir um caleidoscópio precisamos de:

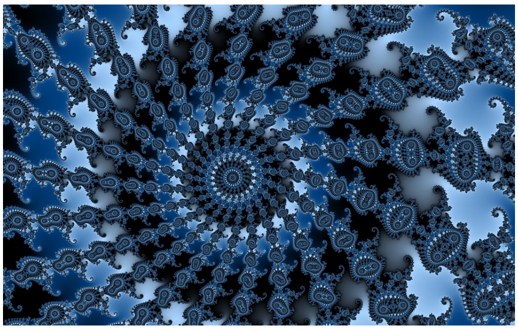
- 3 réguas iguais transparentes;
- Papel escuro para encapar;
- Papel transparente;
- Miçangas, contas ou pedrinhas;
- Fita adesiva;
- Papel vegetal;

Tendo todos os materiais em mãos podemos começar a fazer nosso caleidoscópio. Para isso:

1. Una as três réguas formando um triângulo na base;
2. Fixe as réguas usando fita adesiva;
3. O resultado será um prisma de base triangular, com as bases ainda abertas;
4. Encape o prisma com o papel preto, deixando as bases abertas;
5. Cubra uma das bases com um papel transparente;
6. Recorte uma faixa a mais de papel escuro e envolva essa ponta do prisma, criando, como se fosse, uma "barreira"por fora, para não cair os objetos que vamos colocar;
7. Adicione as miçangas e pequenos objetos coloridos nessa parte e tampe com papel vegetal;
8. Tampe a outra ponta do prisma com um papel preto;
9. Por fim, faça um furo no meio dessa tampa para que você possa observar dentro do caleidoscópio;
10. A cada movimento são formadas novas imagens no caleidoscópio;
11. Decore o caleidoscópio como desejar;
12. O resultado será como o da figura a seguir.

1.3 Comparando as imagens geradas por um caleidoscópio com um fractal

As imagens geradas por um caleidoscópio são de extrema beleza. Na Matemática a Geometria dos Fractais também nos oferece imagens que chamam muito a nossa atenção. Perceba a figura a seguir:



Mas, afinal, o que é um fractal?

1.3.1 O que é um fractal?

Na natureza existem vários exemplos de imagens que se aproximam de um fractal, por exemplo:

1. Uma samambaia, onde cada folha menor parece com a folha maior. E esse processo se repete em cada ramo.
2. O brócolis romanesco, como na figura ao lado, que segue o mesmo padrão de repetição.

É possível encontrar diversas definições para fractal. Por exemplo:

- Para Mandelbrot "um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos."
- Para Barbosa "um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff- Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica."
- Para Gouvêa podemos considerar os fractais como "formas que se caracterizam por repetir um determinado padrão (auto-similaridade). Em consequência da auto-similaridade, quando vistas através de uma lente de aumento, as diferentes partes de um fractal se mostram similares à forma como um todo."

Para concluirmos se um caleidoscópio é ou não um fractal usaremos a definição dada por Karas, de que um fractal é uma figura que possui as seguintes características:

1. Estrutura fina
2. Auto-similaridade
3. Simplicidade na lei de formação

Na próxima seção iremos construir bases caleidoscópicas geométricas, e posteriormente levantar alguns pontos para ver se a base será ou não um fractal.

1.4 Construção no GeoGebra

O GeoGebra é um *software* gratuito de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. É uma ótima ferramenta para ser utilizada no contexto da sala de aula, pois facilita a visualização e permite trabalhar com problemas de investigação.

Para este trabalho apresentaremos a construção de dois tipos de caleidoscópios, sendo que entre parênteses está a configuração, indicando a quantidade de lados que cada polígono terá.

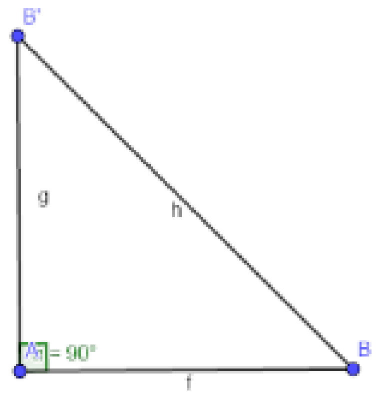
1.4.1 Caleidoscópio isóscele retângulo, de configuração (4,8,8)

1. Inicie com um segmento de reta AB:

2. Clique no ícone "ângulo com amplitude fixa";

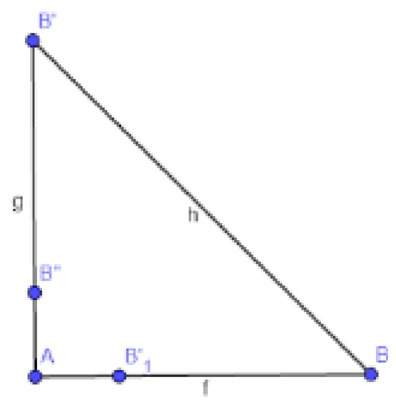
3. Clique em B e depois em A, coloque 90°. Aparecerá B';

4. Ligue os segmentos AB' e BB':



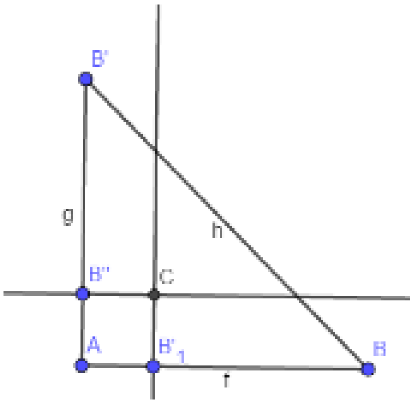
5. Vá no ícone "Homotetia", selecione B depois A e coloque como fator $\frac{1}{4}$ (teremos o ponto B'_1);

6. Repita o processo anterior para B' e A. Obtendo assim B'':



7. Vá no ícone ícone "Reta Perpendicular" e selecione o ponto B_1' e o segmento AB. Repita o processo, mas para o ponto B'' e o segmento AB';

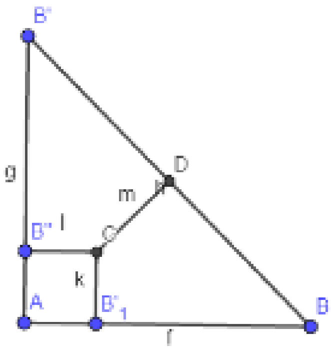
8. Faça a interseção das duas retas criadas no item anterior, que será o ponto C;



9. Esconda as retas criadas e faça os segmentos CB_1' e $B''C$;

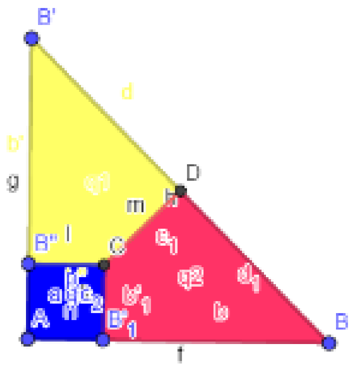
10. Faça o ponto médio de BB', que será D;

11. Ligue com um segmento D até C:



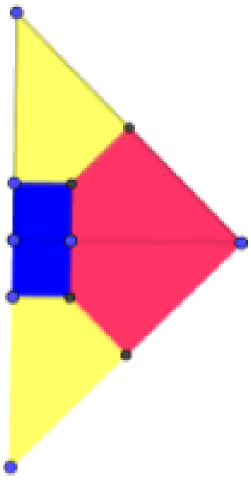
12. Vá na ferramenta "Polígono" e construa os quadriláteros: $B'DCB''$; $CDBB_1'$; $AB''CB_1'$;

13. Para mudar a cor dos polígonos basta clicar em cima com o botão direito do mouse, ir em "Configurações", depois uma aba se abrirá no canto direito da página. Então é só clicar em "cor" e prosseguir como desejado:

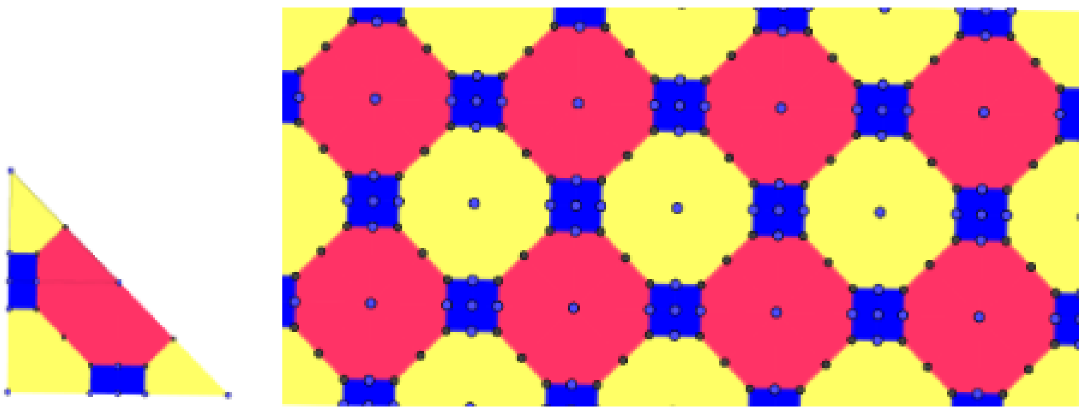


14. Para prossguir retiramos os rótulos dos objetos. Basta selecionar toda a imagem, clicar com o botão direito e clicar em "exibir rótulo";

15. Para seguir com as iterações utilizaremos a ferramenta "Reflexão em Relação a uma Reta". Selecione todo o triângulo, e clique no segmento de baixo do polígono (reta d a qual escondemos o rótulo):



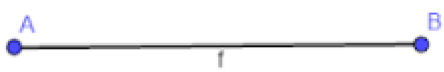
16. Repita o processo, mas agora com o novo eixo de simetria:



17. Perceba que ficamos com uma configuração de um quadrado e dois octógonos.

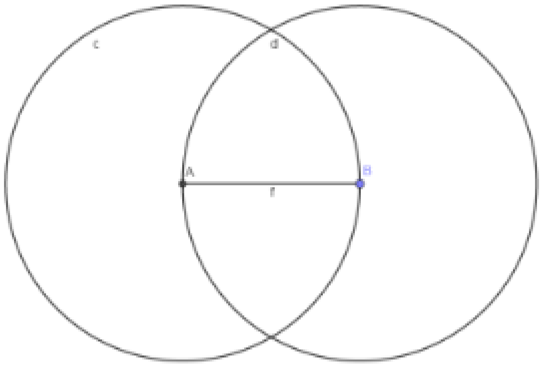
1.4.2 Caleidoscópio escaleno, de configuração (4,6,12)

1. Inicie com um segmento de reta AB:

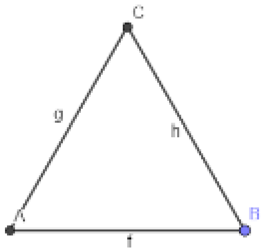


2. Clique no ícone "Círculo dado Centro e um dos seus pontos";

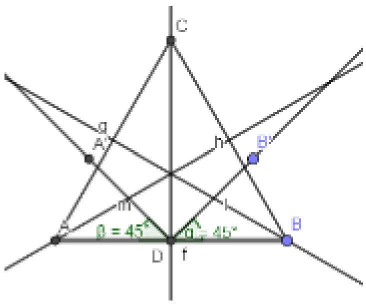
3. Faça uma circunferência com centro em A e abertura até B, e outra com centro em B e abertura até A:



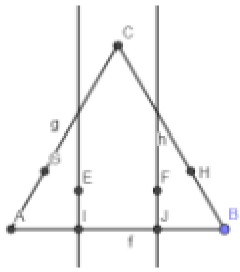
4. Marque o ponto C, interseção de cima entre as duas circunferências;
5. Faça os segmentos AC e BC:



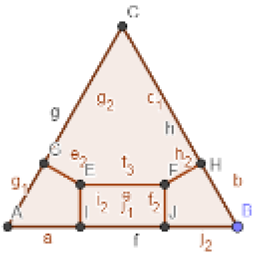
6. Vá no ícone "Bissetriz"e faça a bissetriz dos ângulos internos do triângulo;
7. Marque D, ponto médio de AB;
8. Construa duas semi-retas em B inclinadas a 45º do segmento AB:



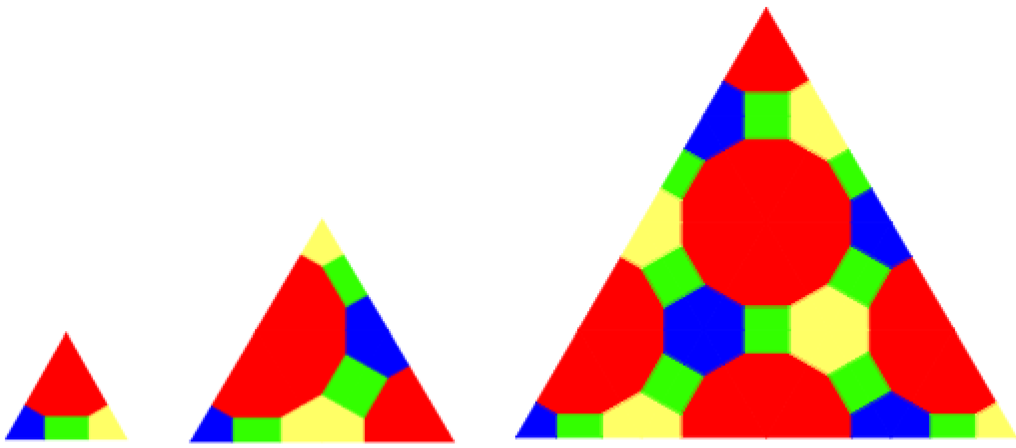
9. Marque a interseção entre as bissetrizes de $\hat{B}$ e $\hat{A}$ e as retas criadas acima. Serão os pontos E e F;
10. Crie uma reta paralela a bissetriz de $\hat{B}$ que passe por E e outra paralela a bissetriz de $\hat{A}$ que passa por F. Retas n e p;
11. Ache a interseção entre a reta n e o lado CA, e entre p e o lado CB, que serão, respectivamente, os pontos G e H. Depois deixe as retas e o ponto D invisíveis;
12. Crie uma reta perpendicular a AB que passa por E e outra que passa por F e marque as interseções dessas retas com AB, que serão os pontos I e J:



13. Esconda as retas e crie os polígonos $AGEI$, $EFJI$, $FJBH$ e $GEFHC$:



14. Para colorir basta ir em configurações:



15. Perceba que ficamos com uma configuração de um quadrado, um hexágono e um dodecágono.

1.4.3 Caleidoscópio e Fractal

Relembrando, as características de um fractal são:

- Estrutura fina
- Auto-similaridade
- Simplicidade na lei de formação

Olhando agora para a imagem gerada pelo caleidoscópio, podemos identificar essas características que definem os fractais. Temos uma base geradora que, através da reflexão, gera toda nossa imagem caleidoscópica, ou seja, há uma simplicidade na lei de formação e olhando para essa base também percebemos uma auto-similaridade envolvida.

Podemos também enxergar uma estrutura fina em sua base, ou seja, quanto mais detalhes na base geradora maior será o detalhamento na imagem final.

Se olharmos para a definição de Mandelbrot, temos que o todo se assemelha a base geradora através da reflexão, ou seja, com estas definições podemos sim considerar a imagem caleidoscópica como um fractal.

1.5 Plano de aula

Como dito anteriormente essa é uma proposta metodológica para introduzir, através dos conteúdos listados nesse capítulo, uma noção da geometria dos fractais na Educação Básica, como orienta as Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática.

Estas aulas são propostas para os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental II com o assunto de Transformações Geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação, de uma maneira interdisciplinar com a matéria de Artes. Com essas aulas temos o objetivo de fazer com que os alunos construam um caleidoscópio utilizando materiais simples e investiguem os efeitos que são produzidos nas imagens geradas pelo caleidoscópio. A beleza das imagens lembra muito as imagens de fractais, com isso temos a oportunidade de introduzir o que é um fractal, trazendo exemplos da natureza e outros exemplos, como o triângulo de Sierpinski e o Floco de Neve de Koch, questionando os alunos sobre os padrões que eles estão observando tanto nos fractais quanto nas imagens geradas pelo caleidoscópio, e, a partir disso, discutir o conteúdo de simetrias através da utilização do mesmo.

Iremos dividir o nosso plano de aula em três partes:

1. Apresentação do caleidoscópio e construção do mesmo;
2. Apresentação dos fractais e comparação com as imagens geradas pelo caleidoscópio;
3. Construção no GeoGebra para trabalhar questões de simetria.

A interdisciplinaridade com a matéria de Artes surge pelo fato de que as bases do caleidoscópio podem ser desenvolvidas de forma que explore a criatividade dos alunos para formarem novas configurações, criando, assim, bases artísticas e geométricas.

1.6 Conclusão

Como forma de introduzir uma noção de fractais para os alunos do Ensino Fundamental nas aulas de Matemática, trazemos uma proposta de comparar as imagens geradas pelos caleidoscópios com as imagens de fractais, de forma que eles percebam os padrões envolvendo os fractais, possam discutir os padrões de simetria relacionados com as imagens dos caleidoscópios e discutir se os mesmos podem ser considerados um fractal.

A ideia é permitir que os alunos conheçam a Geometria Fractal sem que haja uma ruptura no cronograma que geralmente os professores desenvolvem, que prioriza conteúdos que serão usados nos próximos anos (ou seja, conteúdos que são pré-requisitos para os próximos tópicos da matemática), conteúdos que aparecem mais nos vestibulares ou que o professor tem mais facilidade em trabalhar. Com essa proposta o professor pode trazer algo a mais (os fractais) num contexto de Transformações Geométricas.

Oferecer ao aluno a oportunidade de conhecer uma nova Geometria pode fazer com que ele enxergue a Matemática de outra forma, percebendo a beleza por trás dessa disciplina que assusta a muitos. Além disso será possível fazer com que os alunos discutam outras questões em sala de aula, como, por exemplo, a questão de infinito e generalização de padrões.

Referências Bibliográficas