

Capítulo 1

Curvas de preenchimento de espaço

Kevyan Uehara

Andréia Cristina Silveira

Flavia Cerqueira Cesar

José Eduardo

Neste capítulo apresentamos as curvas de preenchimento de espaço. Falaremos um pouco sobre o que são essas curvas e porque recebem esse nome de acordo com a dimensão espacial delas. Mostraremos alguns exemplos dessas curvas sendo elas: Peano, Gosper e Hilbert

1.1 Curvas de preenchimento de espaço

Também conhecida como curva de Peano, em 1890 o Matemático Giuseppe Peano descobriu uma curva capaz de passar por todos os pontos de um quadrado, ou seja, preenchendo um espaço bidimensional. Revolucionou o mundo Matemático, pois alterou o conceito de curva.

Em 1891 o Matemático David Hilbert descreveu uma variação da curva de Peano mostrada nas figuras a seguir:

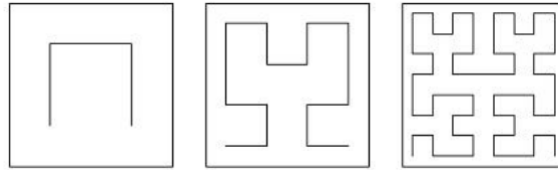


Figura 1.1: Fonte: Argote - 2013

Estendeu o estudo para espaços n-dimensionais.

1.1.1 Dimensão

Dimensão Topológica

Ponto: dim0

Reta: dim1

Plano: dim2

Sólidos: dim3

⋮

Dimensão Espacial

N - N° de figuras

R - Fator de redução

D - Dimensão

Teremos então:

$$N = R^{-D} \quad (1.1)$$

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{R}} \quad (1.2)$$

1.2 Curva de Peano

1.2.1 Construção

Para construção da curva de Peano vamos começar por um pequeno segmento de reta. Depois dividimos esse segmento de reta em três sub-segmentos iguais e construímos um retângulo no sub-segmento do meio ficando com dois quadrados de lado iguais a cada um dos sub-segmentos. Obtemos portanto uma curva geradora com 9 sub-segmentos [Fernandes, 2007] como mostra as figuras a seguir:



Figura 1.2: Fonte: Andréia Cristina Silveira

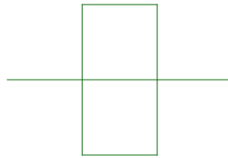


Figura 1.3: Fonte: Andréia Cristina Silveira

Cada segmento de reta será substituído por vários segmentos de retas inferior e proporcional.

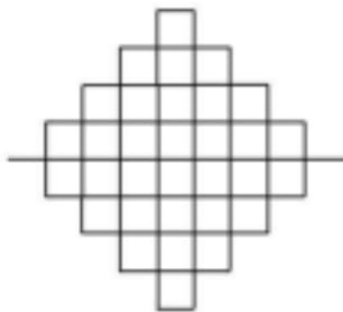


Figura 1.4: Fonte: Nunes - 2006

Vejamos a tabela:

Passos	Nº de sub-segmentos	Comprimento de cada sub-segmento	Comprimento da curva
0	1	1	1
1	9	$1/3$	$9 \cdot (1/3)$
2	9^2	$1/3^2$	$9^2 \cdot (1/3^2)$
3	9^3	$1/3^3$	$9^3 \cdot (1/3^3)$
4	9^4	$1/3^4$	$9^4 \cdot (1/3^4)$
...
k	9^k	$1/3^k$	$9^k \cdot (1/3^k) = 3^k$

Figura 1.5: Fonte: Andréia Cristina Silveira

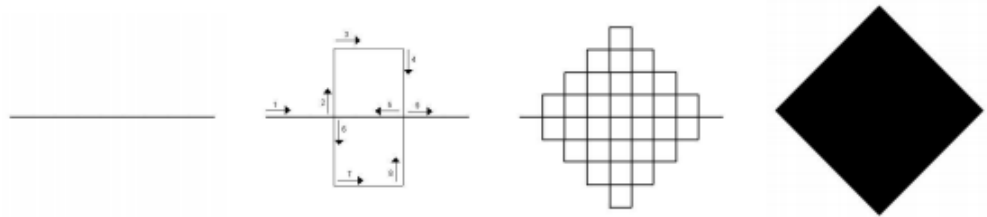


Figura 1.6: Fonte: NUNES - 2006

Fazendo varias interações enchemos o quadrado

1.2.2 IFS

Partimos de um segmento unitário



Figura 1.7: Fonte: Andréia Cristina Silveira

$$T_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\mathbf{x} \quad \text{—————}$$

Figura 1.8: Fonte: Andréia Cristina Silveira

$$T_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\text{sen}(\pi/2) \\ \text{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1|3) \\ 0 \end{pmatrix}$$



Figura 1.9: Fonte: Andréia Cristina Silveira

$$T_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} (1|3) \\ (1|3) \end{pmatrix}$$



Figura 1.10: Fonte: Andréia Cristina Silveira

$$T_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\text{sen}(\pi/2) \\ \text{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (2|3) \\ 0 \end{pmatrix}$$



Figura 1.11: Fonte: Andréia Cristina Silveira


$$T_5(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} (1|3) \\ 0 \end{pmatrix}$$


Figura 1.12: Fonte: Andréia Cristina Silveira

$$T_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\text{sen}(\pi/2) \\ \text{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1|3) \\ -(1|3) \end{pmatrix}$$



Figura 1.13: Fonte: Andréia Cristina Silveira

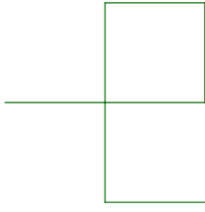
$$T_7(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} (1|3) \\ -(1|3) \end{pmatrix}$$


Figura 1.14: Fonte: Andréia Cristina Silveira

$$T_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\text{sen}(\pi/2) \\ \text{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (2|3) \\ -(1|3) \end{pmatrix}$$

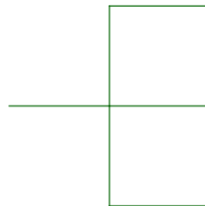


Figura 1.15: Fonte: Andréia Cristina Silveira

$$T_9(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2|3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

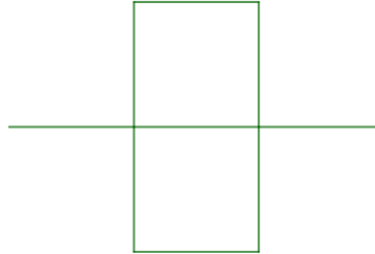


Figura 1.16: Fonte: Andréia Cristina Silveira

1.2.3 Dimensão

Temos nove segmentos de reta ($N = 9$). Comprimento de cada segmento $\frac{1}{3}$ em relação ao segmento inicial [Silva, 2008]

Então:

Nº de figura $N = 9$;

Fator de redução $R = 1/3$

$$D = \frac{\ln N}{\ln R} = \frac{\ln 9}{\ln 3} = 2$$

Dimensão espacial = 2;

Dimensão topológica = 1

1.3 Curva de Peano Gosper

A curva de Peano-Gosper é uma curva de preenchimento do plano, desenvolvida por Peano e Bill Gosper, conhecida também por flowsnake (foco de neve). Originalmente chamada de "cobra-cobra" por R. W. Gosper e M. Gardner Mandelbrot (1977) e posteriormente cunhou o nome Curva Peano-Gosper.

O objetivo dessa curva foi sanar a deficiência da Curva de Peano, que possui uma infinidade de pontos de intersecção.

O iniciador é um segmento de reta, mas o gerador é um pouco mais complexo, associado a malha de triângulos equiláteros.

1.3.1 Dimensão

A dimensão espacial é baseada no gerador. Temos sete segmentos de reta ($N=7$) Comprimento de cada segmento é $\frac{1}{\sqrt{7}}$ em relação ao segmento inicial.

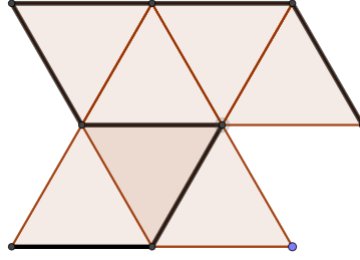


Figura 1.17: Fonte: Flavia Cerqueira Cesar

$$\text{Logo: } D = \frac{\ln 7}{\ln \sqrt{7}} = 2$$

1.4 Curva de Hilbert

A curva de Hilbert foi criada em 1891 pelo matemático David Hilbert. Ele apresentou a primeira construção geométrica de uma curva sobrejetiva e contínua que mapeia um intervalo unitário em um quadrado unitário [Buchin, 2008]. E Apesar de sabermos várias propriedades, ela não possui uma descrição analítica simples [Da Cruz, 2014].

Como as outras curvas de preenchimento de espaço, a curva de Hilbert tem dimensão do espaço que preenche. Então se tomamos o mapa H_d como a curva de Hilbert que mapeia um intervalo I em um hipercubo I^d ,

$$H_d : I \longrightarrow I^d, \quad I \subset \mathbb{R} \quad (1.3)$$

Nossa curva será de dimensão d .

Em sua formulação original, a curva H_2 pode ser construída geometricamente da seguinte maneira:

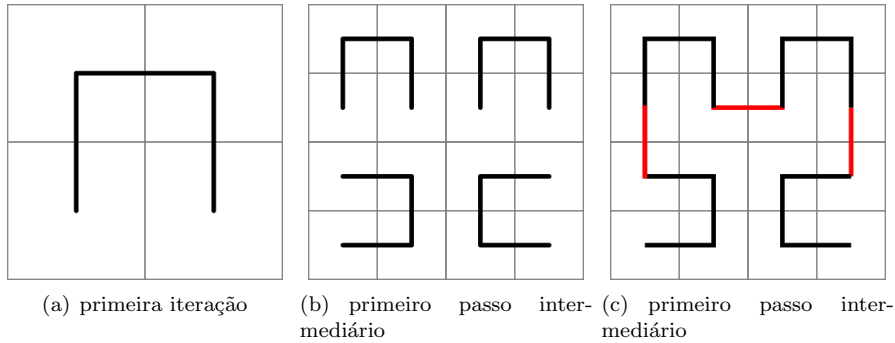


Figura 1.18: Iterações da curva de hilbert
Fonte: Kevyan Uehara

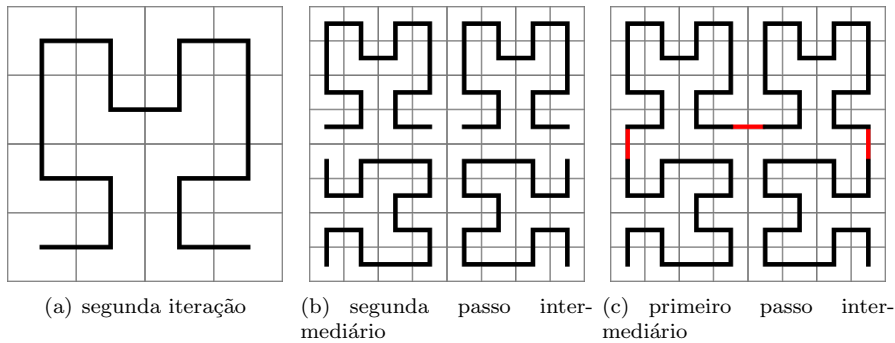


Figura 1.19: Iterações da curva de hilbert

Fonte: Kevyan Uehara

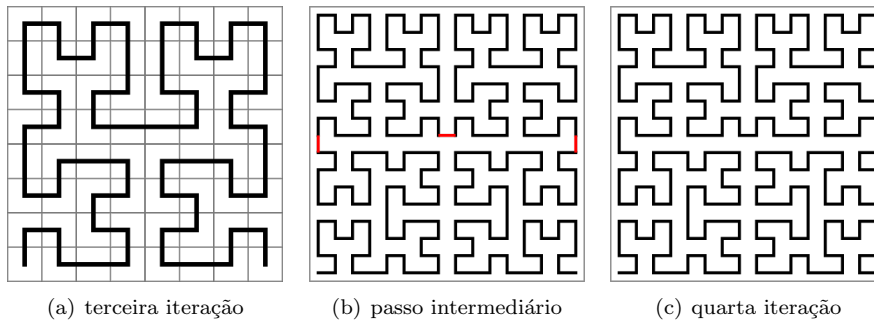


Figura 1.20: Iterações da curva de hilbert

Fonte: Kevyan Uehara

Como a curva de Hilbert mapeia pontos próximos do plano para pontos próximos da reta, ele é muito útil em para reduzir problemas multidimensionais para problemas unidimensionais. Outra aplicação é como base de heurística para o problema do caixeiro viajante [Buchin, 2008].

Bibliografia

- [Artemática, 2019] Artemática (2019). curvas que preenchem o espaço - curvas e sua arte. <http://editaedi.ufpa.br/ebooks/artemática/preenchimento-curvas.html>. Acessado: 11-25-2019.
- [Barbosa, 2002] Barbosa, R. M. (2002). *Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula*. Autêntica, Belo Horizonte, Brasil.
- [Barnsley, 1988] Barnsley, M. F. (1988). *Fractals Everywhere*. Academic Press Inc., Atlanta.
- [Birgin and Martínez, 2005] Birgin, E. G. and Martínez, J. M. (2005). Local convergence of an inexact-restoration method and numerical experiments. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 127:229–247.
- [Buchin, 2008] Buchin, K. (2008). *Organizing point sets: Space-filling curves, Delaunay tessellations of random point sets, and flow complexes*. PhD thesis.
- [Byrd, 1987] Byrd, R. H. (1987). Robust trust region methods for constrained optimization. Third SIAM Conference on Optimization.
- [Chin, 2001] Chin, C. M. (2001). *A new trust region based SLP-filter algorithm which uses EQP active set strategy*. PhD thesis, Department of Mathematics, University of Dundee, Scotland.
- [Chin, 2002] Chin, C. M. (2002). A global convergence theory of a filter line search method for nonlinear programming. Technical report, Numerical Optimization Report, Department of Statistics, University of Oxford, England.
- [Conn et al., 1997] Conn, A. R., Scheinberg, K., and Toint, P. L. (1997). On the convergence of derivative-free methods for unconstrained optimization. In Buhmann, M. and Iserles, A., editors, *Advances in Nonlinear Programming*, pages 83–108. Cambridge University Press, Inglaterra.
- [Da Cruz, 2014] Da Cruz, G. P. (2014). Fractais: Padrões complexos de incrível beleza.
- [de Aguiar, 2000] de Aguiar, M. A. (2000). Complexidade e caos, por h. moyses nussenzeig (organizador), editora da ufrj/copea, 1999. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 22(2).

- [Falconer, 2003] Falconer, K. (2003). *Fractal geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley and Sons, Inglaterra, segunda edição.
- [Fernandes, 2007] Fernandes, J. A. (2007). *Fractais: Uma nova visão da matemática*.
- [Karas, 1994] Karas, E. (1994). *Iteração de transformações racionais aplicada ao método de Newton no plano complexo*. Dissertação de mestrado em Matemática Aplicada, IME-USP, São Paulo, Brasil.
- [McCollum, 2006] McCollum, B. (2006). A perspective on bridging the gap between theory and practice in university timetabling. In *Proceedings of the 6th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling - PATAT*, volume 3867, pages 3–23. Springer-Verlag Lecture Notes in Computer Science.
- [Serra and Karas, 1997] Serra, C. and Karas, E. (1997). *Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos*. Champagnat, Curitiba, Brasil.
- [Silva, 2008] Silva, M. R. (2008). *Novas configurações de monopolos planares quase-fractais para sistemas de comunicações móveis*.