

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CMM102 - Tópicos de Matemática 2: Fractais
Professora Elizabeth Wegner Karas
Trabalho em grupos

Curitiba, novembro de 2019.

Sumário

1	A Esponja de Menger	1
1.1	A construção da Esponja de Menger	2
1.2	Dimensão topológica e espacial	4
1.3	Área e Volume	5
1.3.1	Cálculo da área	5
1.3.2	Cálculo do volume	7
1.4	A construção da Esponja de Menger pelo processo IFS	8
	Referências Bibliográficas	10

Capítulo 1

A Esponja de Menger

Gabriel Cordeiro Chileider

Laiane Crysti Sgota

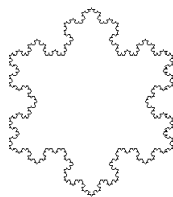
Luiz Felipe Vieira Haragushiku

Vinicius Medeiros Prantl dos Santos

A matemática sempre existiu, mas acredita-se que ela começou a ser estudada na Grécia Antiga quando pensadores como Arquimedes e Pitágoras voltaram seus olhares para a Geometria. Desde então, cada área da matemática tem se desenvolvido, inclusive a própria Geometria.

Uma das subáreas da Geometria que vem sendo estudada recentemente é a Geometria Fractal com seus objetos de estudo denominados Fractais. Mas afinal, o que é um Fractal?

Segundo [2], os Fractais são figuras que possuem estrutura fina, auto-similaridade e simplicidade na lei de formação, um exemplo disso é a *Curva de Koch*.



Curva de Koch

Em uma abordagem mais formal [2, p.15] define os fractais como figuras que possuem Dimensão Espacial estritamente maior do que a Dimensão Topológica. No exemplo acima, por se tratar de uma curva a figura é uni-dimensional com relação a sua dimensão topológica, já a dimensão espacial da Curva de Koch vale aproximadamente 1,26.

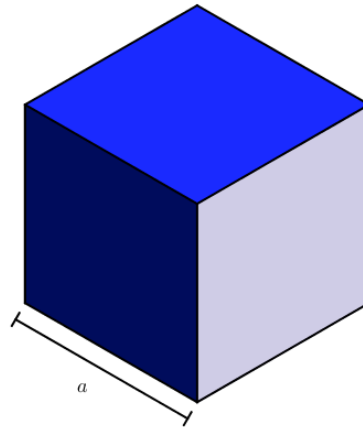
Para entender melhor o conceito de dimensão espacial escolhemos apresentar neste trabalho um fractal cujo nome é “A Esponja de Menger”. Ela carrega esse nome pois foi estudada pela primeira vez pelo matemático austríaco Karl Menger (1902-1985), justamente quando ele estava estudando o conceito de Dimensão Topológica.[1]

A esponja de Menger pode ser construída utilizando como base um cubo, então pode ser considerada um fractal 3D. Faremos a construção desse objeto (tanto geométrica quanto pelo método IFS), estudaremos sua dimensão espacial e para finalizar mostraremos que a Esponja de Menger tem área infinita e volume nulo.

1.1 A construção da Esponja de Menger

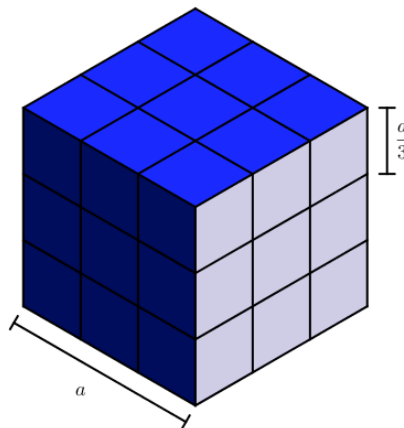
Como já citado, a Esponja de Menger é um fractal que deve ser construído a partir de um cubo, explicaremos a seguir o passo a passo de como podemos fazer essa construção baseada nas ideias de [1, p.71].

1. O primeiro passo consiste em construir arbitrariamente um cubo cuja aresta possui medida a , conforme a figura abaixo.



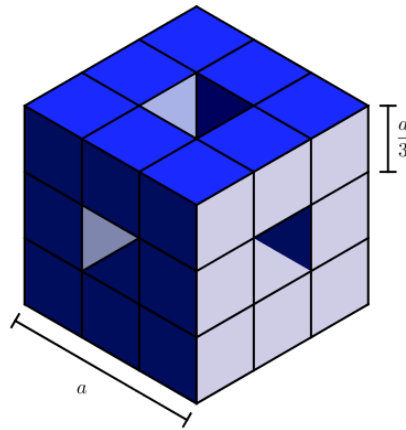
Fonte: Os autores.

2. Após o passo anterior, devemos dividir o cubo obtido em 27 cubos menores de arestas de medidas $\frac{a}{3}$, esse passo está ilustrado abaixo.



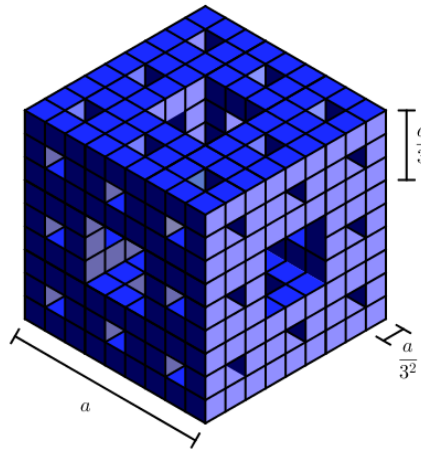
Fonte: Os autores.

3. No terceiro passo removemos os seis cubos dos centros de cada face, além do cubo central, resultado apenas 20 cubos com arestas de medida $\frac{a}{3}$.



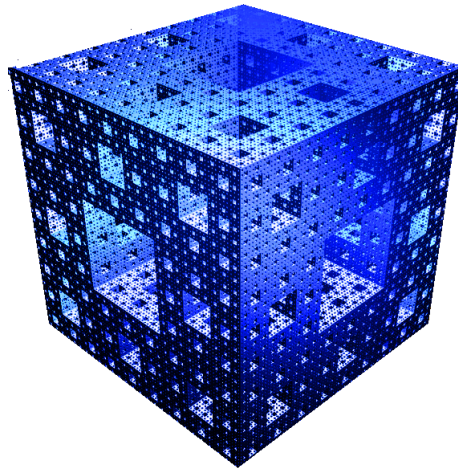
Fonte: Os autores.

Com isso, primeira etapa da construção da Esponja de Menger está concluída. Os três passos anteriores são chamados de primeira *iteração*, vejamos a segunda iteração:



Fonte: Os autores.

Para finalizar a construção basta repetir esse processo de modo que o número n de iterações tenda ao infinito, assim obtemos a esponja de Menger.



A Esponja de Menger

1.2 Dimensão topológica e espacial

Antes de formalizar o conceito de dimensão, é importante observar o que acontece com o número de cubos e o tamanho de cada aresta na construção da Esponja de Menger após um número n de iterações. Na primeira iteração, a partir de cubo de aresta a foram removidos 7 cubos de aresta $\frac{a}{3}$ e obtemos uma figura que contém 20 cubos de aresta $\frac{a}{3}$. Este processo foi repetido na segunda iteração, então para cada um dos 20 cubos serão removidos 7 cubos de aresta $\frac{a}{3^2}$ e teremos 20 novos cubos com arestas medindo $\frac{a}{3^2}$. Assim obtemos a seguinte tabela:

Número de iterações	Cubos Removidos	Cubos que sobraram	Tamanho da aresta dos cubos restantes
0	0	27	a
1	7	20	$\frac{a}{3}$
2	$7 \cdot 20$	20^2	$\frac{a}{3^2}$
3	$7 \cdot 20^2$	20^3	$\frac{a}{3^3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$7 \cdot 20^{n-1}$	20^n	$\frac{a}{3^n}$

Tabela 1: As iterações no processo da construção da Esponja de Menger

Observação 1.2.1 *Note que a Esponja de Menger possui auto-similaridade, ou seja, em cada iteração obteremos uma parte da figura que é semelhante a figura da iteração anterior. Por exemplo, com o auxílio da tabela acima, observe que teremos 20 cubos de aresta $\frac{a}{3^2}$ semelhantes a figura obtida na primeira iteração.*

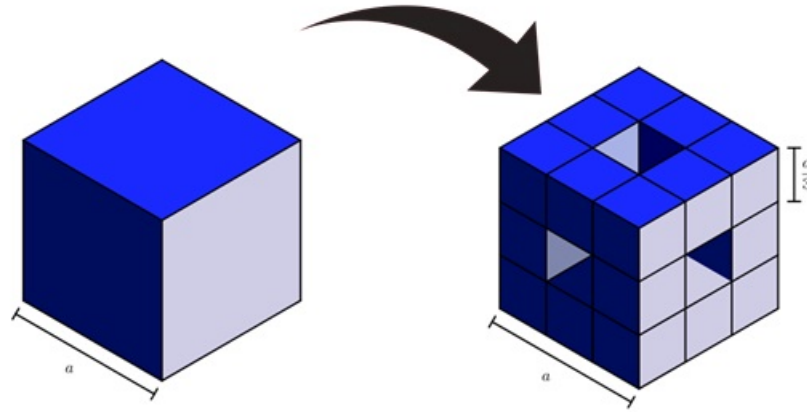
Agora que já estamos familiarizados com o conceito de auto-similaridade podemos introduzir o conceito de dimensão. Como já citado anteriormente, um fractal possui dimensão topológica estritamente menor do que a dimensão espacial.

A dimensão topológica é dada por um número natural e envolve alguns conceitos complexos que fogem ao escopo deste trabalho. Tudo que precisamos saber é que pontos possuem dimensão nula, as curvas são unidimensionais e as superfícies são bidimensionais. Já a dimensão espacial é escrita como uma fração de logaritmos, vejamos a definição a seguir, baseada em [2, p.15]

Definição 1.1 *Sejam F um fractal que possui auto-similaridade estrita, p o número de subpartes similares que tomam no lugar de uma dada parte do fractal e q o fator de redução da parte considerada para cada subparte correspondente. Então a dimensão espacial é dada por*

$$\dim F = -\frac{\log p}{\log q}$$

A partir do que foi dito, calcularemos a dimensão espacial da Esponja de Menger. Como trata-se de um fractal com auto-similaridade, utilizaremos o cubo inicial e a figura obtida na primeira iteração para obter p e q .



O cubo inicial e a primeira iteração

Os cubos obtidos a partir da primeira iteração possuem arestas de valor $\frac{a}{3}$, onde a é o valor da aresta do cubo inicial. logo, o fator de redução q vale $\frac{1}{3}$. Além disso, após a primeira iteração, existem 20 cubos semelhantes ao cubo de aresta a , logo $p = 20$. Portanto, denotando D como a dimensão fractal da Esponja de Menger, temos que

$$D = -\frac{\log p}{\log q} = -\frac{\log 20}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2.7268$$

Do resultado acima podemos concluir que a Esponja de Menger, de fato, possui dimensão topológica menor do que a dimensão espacial. Visto que topologicamente é uma superfície e portanto bidimensional. Além do mais, ao interpretar sua dimensão espacial é possível concluir que a Esponja de Menger trata-se de um objeto matemático que está mais próximo de ser tridimensional do que um objeto do plano.

1.3 Área e Volume

1.3.1 Cálculo da área

Nesta seção vamos calcular a área e o volume da Esponja de Menger. Vimos que para construirmos este fractal, é necessário fazer o número de iterações tender ao infinito. Assim, para obtermos a área da Esponja, encontraremos a área da n -ésima iteração e tomarmos o limite com $n \rightarrow \infty$.

Consideraremos A_n e q_n a área e o número de quadrados da figura na n -ésima etapa de construção da esponja, respectivamente. Perceba que na etapa inicial, ou seja,

quando $n = 0$, temos um único cubo formado por 6 quadrados, que são suas respectivas faces. Logo, $q_0 = 6$. Sendo A a área de cada um desses quadrados segue que a área inicial A_0 é

$$A_0 = q_0 A = 6A.$$

Se a é a aresta do cubo inicial, então $A = a^2$. Da construção da Esponja segue que na primeira iteração o tamanho da resta é reduzido para $\frac{a}{3}$. Com isso, segue que as áreas dos quadrados da primeira iteração são

$$A_1 = q_1 \left(\frac{a}{3}\right)^2 = q_1 \frac{a^2}{9} = q_1 \frac{A}{9}.$$

Observe que na primeira iteração de construção da Esponja são retirados 7 cubos, sendo estes localizados no centro de cada face do cubo inicial e o cubo central. Assim, para cada face do cubo inicial onde tínhamos apenas um único quadrado de lado a , temos agora 8 quadrados de lado $\frac{a}{3}$. Além dos quadrados das faces, agora possuímos os quadrados do lado de dentro do cubo. Cada um desses buracos possui 4 quadrados e, como são 6 buracos, segue que o número de quadrados no interior da Esponja quando $n = 1$ é $6 \times 4 = 24$. Logo o número de quadrados na primeira iteração é

$$q_1 = q_0 \cdot 8 + 1 \cdot 24 = 6 \cdot 8 + 20^0 \cdot 24.$$

Portanto segue que a área da Esponja na primeira iteração é

$$A_1 = 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^1 A + \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^0 A.$$

Para a segunda iteração, temos para cada quadrado 8 novos quadrados e, para cada um dos 20 cubos restantes da etapa anterior, aparecem 24 novos outros quadrados referentes aos buracos feitos no centro dos cubos para construção da esponja. Assim, segue que

$$q_2 = q_1 \cdot 8 + 20 \cdot 24 = (6 \cdot 8 + 20^0 \cdot 24) \cdot 8 + 20 \cdot 24 = 6 \cdot 8^2 + 20^0 \cdot 24 \cdot 8 + 20^1 \cdot 24.$$

Como as arestas na segunda iteração medem $\frac{a}{3^2}$, cada quadrado possui área igual a $\left(\frac{a}{3^2}\right)^2 = \frac{a^2}{9^2} = \frac{1}{9^2}A$. Portanto a área na segunda iteração é:

$$\begin{aligned} A_2 &= q_2 \frac{1}{9^2} A = (6 \cdot 8^2 + 20^0 \cdot 24 \cdot 8 + 20^1 \cdot 24) \frac{1}{9^2} A \\ &= 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 A + \frac{20^0 \cdot 24}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^1 A + \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^1 A. \end{aligned}$$

Suponhamos que para a k -ésima iteração onde $k = n$, o número de quadrados é dado por

$$\begin{aligned} q_n &= q_{n-1} \cdot 8 + 20^{n-1} \cdot 24 \\ &= (6 \cdot 8^{n-1} + 20^0 \cdot 24 \cdot 8^{n-2} + 20^1 \cdot 24 \cdot 8^{n-3} + \dots + 20^{n-1} \cdot 24) \cdot 8 + 20^n \cdot 24 \\ &= 6 \cdot 8^n + 20^0 \cdot 24 \cdot 8^{n-1} + 20^1 \cdot 24 \cdot 8^{n-2} + \dots + 20^{n-2} \cdot 24 \cdot 8 + 20^{n-1} \cdot 24 \cdot 8 + 20^n \cdot 24. \end{aligned}$$

Logo a área da esponja será dada por

$$\begin{aligned}
A_n &= q_n \frac{1}{9^n} A \\
&= 6 \left(\frac{8}{9}\right)^n A + \frac{20^0 \cdot 24}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} A + \frac{20^1 \cdot 24}{9^2} \left(\frac{8}{9}\right)^{n-2} A + \cdots + \\
&\quad + \frac{20^{n-2} \cdot 24}{9^{n-1}} \left(\frac{8}{9}\right)^1 A + \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} A.
\end{aligned}$$

Para $k = n + 1$ temos da construção da esponja que para cada quadrado obtemos 8 novos quadrados, além disso teremos os outros 20 cubos os quais possuirão 24 outros quadrados. Logo teremos que

$$\begin{aligned}
q_{n+1} &= q_n \cdot 8 + 20^{n+1} \cdot 24 \\
&= (6 \cdot 8^n + 20^0 \cdot 24 \cdot 8^{n-1} + \cdots + 20^{n-1} \cdot 24 \cdot 8 + 20^n \cdot 24) \cdot 8 + 20^{n+1} \cdot 24 \\
&= 6 \cdot 8^{n+1} + 20^0 \cdot 24 \cdot 8^n + \cdots + 20^{n-1} \cdot 24 \cdot 8^2 + 20^n \cdot 24 \cdot 8 + 20^{n+1} \cdot 24.
\end{aligned}$$

Segue então que a área é dada por

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= q_{n+1} \frac{1}{9^{n+1}} A \\
&= 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1} A + \frac{20^0 \cdot 24}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^n A + \frac{20^1 \cdot 24}{9^2} \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} A + \cdots + \\
&\quad + \frac{20^{n-1} \cdot 24}{9^n} \left(\frac{8}{9}\right)^1 A + \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^n A.
\end{aligned}$$

Encontramos então, pelo método de indução, a expressão para o cálculo da área da Esponja de Menger da n -ésima iteração. Ao aplicar o limite de quando $n \rightarrow \infty$ na expressão de A_n obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n \frac{1}{9^n} A.$$

Observe que $\frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} A < A_n$, porém temos que $\frac{20}{9} > 1$ e disso segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} A = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty.$$

Portanto a área da Esponja de Menger é infinita.

1.3.2 Cálculo do volume

Utilizaremos um raciocínio semelhante ao cálculo da área para encontrar o volume da esponja. Denotaremos V e V_n o volume do cubo inicial e o volume da Esponja na n -ésima iteração.

Como a é a aresta do cubo inicial temos que $V = a^3$. Da construção da Esponja, temos que na primeira iteração, dividimos o cubo inicial em 27 outros cubos menores com aresta igual a $\frac{a}{3}$ e volume igual a $\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27} = \frac{1}{27}V$. Os cubos centrais de cada face do cubo inicial são retirados, além do cubo central. Logo o volume da Esponja na primeira iteração será dado por

$$V_1 = V - 7 \cdot \frac{1}{27}V = \frac{20}{27}V.$$

Para a segunda iteração, os 20 cubos restantes da primeira iteração serão divididos cada um em 27 outros cubos de aresta $\frac{a}{9}$ e volume $(\frac{a}{9})^3 = \frac{a^3}{9^3} = \frac{1}{27}(\frac{1}{27})V$, onde os 7 cubos centrais serão retirados. Assim, o total de cubos retirados será 7×20 . O volume para a segunda iteração é

$$V_2 = V_1 - 7 \cdot 20 \left(\frac{1}{27}\right)^2 V = \frac{20}{27}V - 7 \cdot 20 \left(\frac{1}{27}\right)^2 V = \left(\frac{20}{27}\right)^2 V.$$

Suponhamos que para a k -ésima iteração onde $k = n$ o volume total da esponja seja

$$V_n = \left(\frac{20}{27}\right)^n V.$$

Para $k = n + 1$ da construção da esponja, dividiremos os cada um dos 20^n cubos restantes em 27 outros cubos com aresta $(\frac{1}{3})^{n+1}$ e volume $(\frac{1}{27})^{n+1}V$, dos quais os 7 cubos centrais serão retirados. Então, o volume total da esponja será

$$V_{n+1} = V_n - 7 \cdot 20^n \left(\frac{1}{27}\right)^{n+1} V = \left(\frac{27 \cdot 20^n - 7 \cdot 20^n}{27^{n+1}}\right) V = \left(\frac{20}{27}\right)^{n+1} V.$$

Encontrada a expressão para o volume da esponja para a n -ésima iteração, resta-nos aplicar o limite com $n \rightarrow \infty$. Note que $\frac{20}{27} < 1$, logo temos que

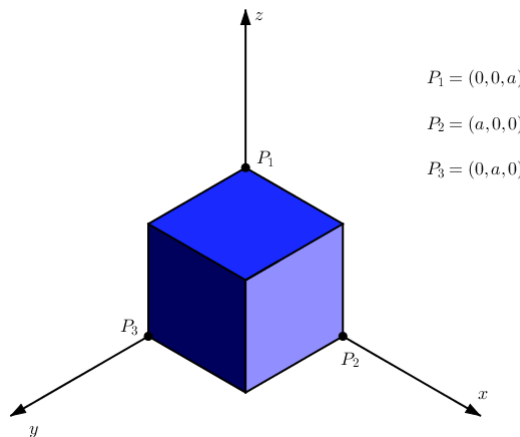
$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^n V = 0.$$

Portanto o volume da Esponja de Menger é nulo.

1.4 A construção da Esponja de Menger pelo processo IFS

Finalizaremos este trabalho com uma segunda construção da Esponja de Menger, mas desta vez esta construção será feita através do método IFS (Iterated Function System). O método IFS consiste em descrever as iterações dos fractais por meio de funções, no caso da Esponja de Menger, este processo se dará por transformações afins, especificamente contrações.

Vimos anteriormente que o passo inicial se dá por um cubo de aresta a . Este cubo pode ser definido pelo conjunto de pontos $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_i \leq a, \forall i = 1, 2, 3\}$. Vejamos abaixo o conjunto S graficamente.

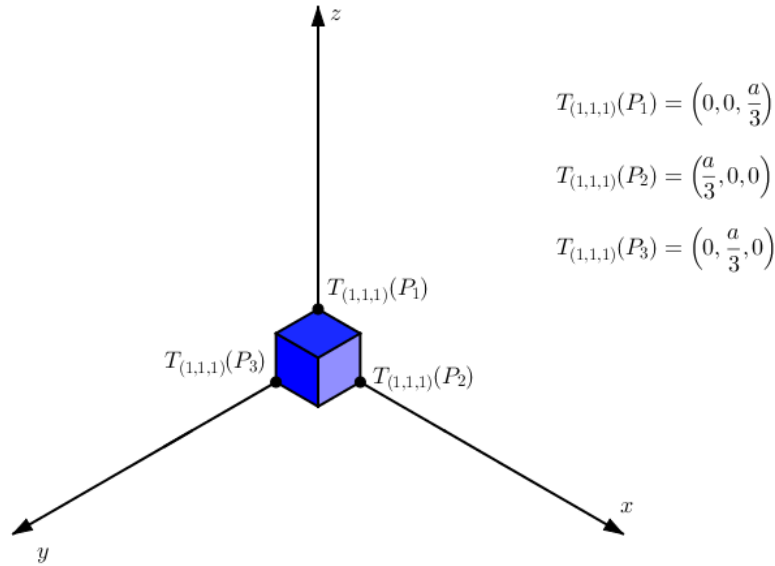


Para prosseguirmos, precisamos definir as transformações afins correspondentes aos 20 cubos que aparecem na primeira iteração da construção da Esponja de Menger. Sejam n_1, n_2, n_3 naturais tais que $1 \leq n_i \leq 3$, para todo $i = 1, 2, 3$. Defina $T_{(n_1, n_2, n_3)} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ da seguinte forma:

$$T_{(n_1, n_2, n_3)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(x_1, x_2, x_3) + \frac{a}{3}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1) \quad (1.1)$$

As 27 transformações afins acima representam os 27 cubos de aresta $\frac{a}{3}$ que aparecem na segunda etapa da primeira iteração. Uma observação importante é que n_1, n_2 e n_3 representam a n -ésima posição do cubo com relação aos eixos x, y e z respectivamente.

A título de exemplo considere agora a contração $T_{(1,1,1)} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T_{(1,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(x_1, x_2, x_3)$. Temos então que $T_{(1,1,1)}(S) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_i \leq \frac{a}{3}\}$, conforme a figura abaixo:



Agora note que das 27 imagens das transformações afins em (1.1) que correspondem aos cubos de aresta $\frac{a}{3}$, só 20 delas devem aparecer. Os cubos correspondentes as imagens de S pelas transformações $T_{(1,2,2)}, T_{(2,1,2)}, T_{(2,2,1)}, T_{(2,2,3)}, T_{(3,2,2)}, T_{(2,3,2)}$ são os centros das seis faces da Esponja de Menger, além disso, $T_{(2,2,2)}$ representa o cubo central. Logo, estas transformações não fazem parte da iteração 1. Uma boa maneira de denotar essas sete transformações seria $T_{(n_1, n_2, n_3)}(S)$ tal que $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 4M$, para algum $M \in \mathbb{Z}$.

A partir do que foi feito podemos definir a primeira iteração da Esponja de Menger como sendo $W(S) = \bigcup_{(j,k,l)} T_{(j,k,l)}(S)$, onde $1 \leq j, k, l \leq 3$ e $j \cdot k \cdot l \neq 4M$, $M \in \mathbb{Z}$.

Por fim, a Esponja de Menger será dada pelo conjunto A definido por $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(S)$, onde $W^n(S)$ é a composição de W n vezes.

Referências Bibliográficas

- [1] A.C. Prokopczyk, F.S.M. Silva, and L.R. Gambera. A geometria da esponja de menger. *C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2:70–77, 12 2013.
- [2] C.P. Serra and E.W. Karas. *Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos*. Champagnat, Curitiba, Brasil, 1997.