Exercícios sobre fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos

1. Considere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável. Seja $\bar{z}$ um ponto fixo indiferente de f. Mostre, usando o princípio de indução, que:

   (a) $\bar{z}$ é um ponto periódico de período n, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $\bar{z}$ é um ponto periódico indiferente de período n, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

2. Considere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável. Seja $\bar{z}$ um ponto periódico de período n de f. Mostre, usando o princípio de indução, que: $\bar{z}$ é um ponto de período mn, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$.

3. Suponha que z_0 é um ponto periódico de período n de f. Mostre que se $z_k = f^k(z_0)$ pertence à órbita de z_0, então $\lambda_{z^k} = \lambda_{z^0}$, em que $\lambda_z = (f^n)'(z)$. O que você conclui?

4. Considere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável. Seja $\{z_1, z_2\}$ uma órbita periódica de período 2 com autovalor $\dfrac{1}{3}$. Pede-se:

   (a) $f^5(z_1)$

   (b) $|(f^4)'(z_1)|$

5. Considere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável. Seja $\{z_1, z_2, z_3\}$ uma órbita periódica de período 3 com autovalor 2, tal que $f(z_1) = z_2$. Pede-se:

   (a) $f^5(z_1)$

   (b) $|(f^3)'(z_1)|$

   (c) $|(f^6)'(z_1)|$

6. Considere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^2 - \dfrac{1}{4}$. Pede-se:

   (a) Os pontos fixos de f.

   (b) Classificação dos pontos fixos de f, obtidos no item anterior.

7. Considere $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $N_g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$N_g(z) = z - \frac{g(z)}{g'(z)},$$

   a transformação associada ao método de Newton para determinar os zeros de g. Dizemos que um zero é simples se anula a função mas não sua derivada. Mostre que:

   (a) Se $\bar{z}$ é zero simples de g, então $\bar{z}$ é ponto fixo superatrator de N_g.

   (b) Se $\bar{z}$ é ponto periódico de f de período n, então $\bar{z}$ é ponto fixo superatrator de N_g, em que $g(z) = f^n(z) - z$.

8. Considere a família $\mathcal{F}_c$ de funções $f_c(z) = z^2 + c$.

   (a) Forneça duas definições diferentes do conjunto de Mandelbrot $\mathcal{M}$.

   (b) Mostre que $c = -2$ pertence ao conjunto de Mandelbrot.

9. Considere a família $\mathcal{F}_c$ de funções $f_c(z) = z^2 + c$. Mostre que:

   (a) f_c tem ciclo de período 2 atrator ou superatrator, se e somente se, $|c + 1| < \dfrac{1}{4}$.

   (b) f_c tem ciclo de período 2 indiferente, se e somente se, $|c + 1| = \dfrac{1}{4}$.

10. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função polinomial e J_f seu conjunto de Julia definido como a fronteira do conjunto dos pontos que têm órbita confinada. Considere $g = f^p$, com $p \in \mathbb{N}$. Mostre que o conjunto de Julia de f e g coincidem.