

PARTE 1 - Fractais geométricos, IFS e conceito de dimensão

- Suponha que na etapa inicial (ou seja, na iteração 0) tenhamos um segmento de reta de $9cm$ de comprimento com extremidades $(0, 0)$ e $(9, 0)$.
- Considere o processo de dividir um segmento em três partes iguais e substituir o terço médio por um **quadrado** sem a base.
- Seja a figura F_k obtida repetindo-se este processo a cada um dos segmentos da iteração $k - 1$.
- Denote por F a figura obtida repetindo-se este processo indefinidamente, ou seja, $F = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k$.

Pede-se:

1. (10) Faça um esboço de F_1 e F_2 , ou seja da primeira e da segunda iteração deste processo.
2. (15) Determine o comprimento da figura F_k , ou seja, na k -ésima iteração. Prove a fórmula encontrada por indução.
3. (15) Determine a iteração k a partir da qual a figura F_k terá pelo menos 9 Km de comprimento.
4. (15) Determine a dimensão topológica e a dimensão espacial da figura F .
5. (05) A figura F é um fractal? Justifique sua resposta.
6. (15) Escreva as transformações afins do conjunto

$$\left\{ T_i(x, y) = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} \right\}$$

de modo a obter a figura F pelo método IFS.

PARTE 2 - Sistemas dinâmicos no plano complexo

- Considere a função $f : C \rightarrow C$ definida por $f(z) = z^2$ e o ponto $z_0 = 1 + \sqrt{3} i$.

Pede-se:

7. (10) Escreva o ponto z_0 na sua forma polar e na sua forma exponencial.
8. (15) Determine a órbita (progressiva) do ponto z_0 pela função f , indicando pelo menos os quatro primeiros pontos da órbita.