2ª Avaliação de Tópicos de Matemática: Fractais - Matemática - 26/11/2019

1. (10) Classifique cada afirmação abaixo em verdadeira (V) ou falsa (F).
   (a) (   ) Todo ponto periódico repulsor pertence ao conjunto de Julia de f.
   (b) (   ) O conjunto de Julia é fechado.
   (c) (   ) O conjunto de Julia é conexo.
   (d) (   ) Se a função $f(z) = z^2 + c$ possui uma órbita periódica atratora de período 5, então todas as demais órbitas periódicas são repulsoras.

2. (20) Considere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^2 - \dfrac{1}{2}$. Pede-se:
   (a) Os pontos fixos finitos de f.
   (b) Classificação dos pontos fixos de f, obtidos no item anterior.

3. (15) Dado $c \in \mathbb{C}$, considere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^2 + c$. Pergunta-se:
   (a) A função f tem quantos pontos fixos finitos?
   (b) Desconsiderando os pontos fixos, a função f tem quantos pontos periódicos de período 2 distribuídos em quantas órbitas?
   (c) Desconsiderando os pontos fixos, a função f tem quantos pontos periódicos de período 3 distribuídos em quantas órbitas?

4. (15) Seja $\mathcal{M}$ o conjunto de Mandelbrot da família de funções da forma $f_c(z) = z^2 + c$. Considere $c \in \mathcal{M}$. O que se pode afirmar sobre:
   (a) o conjunto de Julia da função f_c?
   (b) a órbita da origem para a função f_c?

5. (15) Considere $N : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a transformação associada ao método de Newton para determinar os zeros de f, dada por
$$N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$
   Mostre que se $\bar{z}$ anula f, mas não sua derivada, então $\bar{z}$ é ponto fixo superatrator de N.

6. (25) Considere $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função diferenciável. Seja $\bar{z}$ um ponto periódico de período 3 de f, com autovalor $1 - i$. Pede-se:
   (a) Classifique a órbita de $\bar{z}$ em atratora, repulsora ou indiferente.
   (b) Mostre que $\bar{z}$ é um ponto periódico de período $3n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Determine o autovalor da órbita de período 6 de $\bar{z}$. Classifique esta órbita.