

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**  
**CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

**DENISE MARIA PALLES**

**MOTIVAÇÃO DO ESTUDO DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E  
GEOMÉTRICAS ATRAVÉS DA GEOMETRIA FRACTAL**

**CURITIBA**  
**2007**

**DENISE MARIA PALLES**

**MOTIVAÇÃO DO ESTUDO DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E  
GEOMÉTRICAS ATRAVÉS DA GEOMETRIA FRACTAL**

Monografia apresentada como requisito parcial à conclusão do Curso de Especialização para Professores de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná - UFPR.

Orientador: **Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Elizabeth Wegner Karas**

**CURITIBA  
2007**

# TERMO DE APROVAÇÃO

DENISE MARIA PALLES

## MOTIVAÇÃO DO ESTUDO DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS ATRAVÉS DA GEOMETRIA FRACTAL

Monografia aprovada como requisito parcial para obtenção do título de Especialista no Curso de Especialização para Professores de Matemática, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Elizabeth Wegner Karas  
Departamento de Matemática, UFPR

Prof. Dr. José João Rossetto  
Departamento de Matemática, UFPR

Curitiba, Outubro de 2007.

*"A verdadeira sabedoria consiste em se conhecer a própria ignorância."*

Sócrates

## **DEDICATÓRIA**

Aos meus amigos

*À minha mãe, e em especial ao Gilberto Szpakowski que sempre me apoiou e sem o mesmo não chegaria até aqui.*

## ***AGRADECIMENTOS***

Agradeço à Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Elizabeth Wegner Karas, principalmente pela paciência e compreensão, e pela oportunidade de conhecer um pouquinho deste mundo maravilhoso dos fractais.

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo introduzir o estudo dos fractais aliados as progressões geométricas e aritméticas no ensino médio. Ele é constituído por um vocabulário acessível e possui uma gama de figuras geométricas e tabelas. Contém estudos de sequências, mais precisamente, Progressões Geométricas e Progressões Aritméticas interagidas com os fractais. Os fractais estão detalhados a partir de um breve histórico de sua descoberta, principais características e os algoritmos que propiciam a sua construção. Por fim, apresentamos algumas aplicações dos respectivos fractais no estudo das progressões geométricas e aritméticas. Entre os fractais apresentados encontramos os clássicos Triângulo de Sierpinski, Poeira de Cantor e Curva de Koch, Curva de Peano e Árvores, com os quais podemos construir tabelas e mostrar exemplos geométricos em que aparecem Progressões Geométricas e Progressões Aritméticas, além de aliar o estudo da geometria com conceitos algébricos das progressões. E, finalmente, como mais uma sugestão de atividade, demonstramos a construção de alguns dos fractais aqui apresentados utilizando o Cabri-Gèomètre, por ser uma ferramenta de fácil manipulação e muito útil para este fim.

Palavras-chave: fractais, progressão geométrica, progressão aritmética.

## SUMÁRIO

<b>RESUMO</b> .....	vi
<b>INTRODUÇÃO</b> .....	1
<b>1 SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES</b> .....	3
<b>1.1 Progressão Aritmética – PA</b> .....	4
<b>1.2 Progressão Geométrica – PG</b> .....	6
<b>2 FRACTAIS</b> .....	10
<b>2.1 Características dos fractais</b> .....	10
<b>2.2 Curva de Koch</b> .....	12
<b>2.2.1 Floco de Neve de Koch</b> .....	16
<b>2.3 Triângulo de Sierpinski</b> .....	19
<b>2.4 Curva de Cantor</b> .....	24
<b>2.5 Árvores bifurcadas</b> .....	27
<b>2.6 Curva de Peano</b> .....	31
<b>3 CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS UTILIZANDO O CABRI-GÈOMÈTRE</b> .....	40
<b>3.1 Construção da Curva de Koch</b> .....	40
<b>3.2 Construção do Triângulo de Sierpinski</b> .....	41
<b>3.3 Construção da malha triangulada</b> .....	42
<b>3.4 Construção do fractal circuntexto</b> .....	44
<b>4 CONCLUSÃO</b> .....	46
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	47

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Niels Fabian Helge von Koch .....	12
Figura 2: Processo para a construção da curva de Koch .....	13
Figura 3: Níveis do Floco de Neve de Koch .....	16
Figura 4: Waclaw Sierpinski .....	20
Figura 5: Construção do triângulo de Sierpinski por remoção.....	21
Figura 6: Georg F.L.P. Cantor.....	24
Figura 7: Curva de Cantor.....	25
Figura 8: Árvore bifurcada.....	28
Figura 9: Giuseppe Peano .....	32
Figura 10: Etapas da construção do semiplano superior da Curva de Peano.....	32
Figura 11: Número de linhas (degraus) de cada semiplano.....	35
Figura 12: Termo geral e soma de quadrados.....	37
Figura 13: Curva de Peano nível 3.....	39
Figura 14: Macro-construção da curva de Koch.....	41
Figura 15: Curva de Coch níveis 2 e 3.....	41
Figura 16: Macro-construção do triângulo de Sierpinski.....	42
Figura 17: Triângulo de Sierpinski níveis 2 e 3.....	42
Figura 18: Construção da malha triangulada no Cabri.....	43
Figura 19: Macro-construção do circuntexto.....	45
Figura 20: Fractal circuntexto nível 4.....	45

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Curva de Koch .....	15
Tabela 2: Floco de Neve de Koch .....	18
Tabela 3: Curva triângulo de Sierpinski.....	23
Tabela 4: Curva de Cantor.....	27
Tabela 5: Árvores bifurcadas.....	30
Tabela 6: Curva de Peano .....	36

## INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo mostrar que o uso da geometria fractal pode proporcionar uma maior motivação às aulas de Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG), e faremos isto, apresentando alguns exemplos de progressões geradas através da construção de fractais.

Iniciaremos nossos estudos com conceito de sequências, mostrando também, as principais características das progressões geométricas e aritméticas. Em seguida, apresenta-se uma breve introdução sobre a origem dos fractais, e dá-se início ao estudo das curvas fractais, propriamente ditas.

A primeira curva a ser estudada será a Curva de Koch e, em seguida, veremos o floco de neve de Koch, o triângulo de Sierpinski, as árvores bifurcadas e finalmente a curva de Peano, apresentando em cada seção um pouco sobre a descoberta, o algoritmo de construção, as principais características fractais e aplicações em PA e PG.

Nossa intenção com este trabalho, como já foi dito, é de interagir as progressões com a geometria, visto que, os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental e médio. Por meio destes conceitos, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

Dentro da geometria, podemos encontrar diversas formas de polígonos que nos possibilitam o uso de recursos visuais e manipulativos. Estes recursos constituem um ótimo atrativo no ensino da matemática, de modo que, podem contribuir com o desenvolvimento da temática das PA e PG. Assim sendo, acreditamos que, com a utilização da geometria fractal podemos mostrar que as sequências, de um modo geral, não são somente operações algébricas e que podemos visualizar exemplos geométricos que irão de fato acrescentar muito ao seu estudo, sem deixar de falar na beleza indiscutível dos fractais.

No decorrer deste estudo sobre progressões motivadas pelos fractais, encontramos um sem-fim de situações extremamente motivadoras à serem exploradas no dia-a-dia do ensino da matemática. Além de ser um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e aritméticas e um estímulo ao uso de tabelas, podemos ainda destacar a oportunidade de trabalhar com processos

iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente e introduzir uma idéia intuitiva do conceito de limite.

Diante desta diversidade de aplicações, torna-se indiscutível os benefícios da introdução desta temática nos currículos de nossos alunos.

## 1 SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES

A bibliografia consultada neste capítulo foi baseada, quase que na sua totalidade em [6], [9] e [12].

Em diversas ocasiões, até mesmo em situações do no nosso dia-a-dia, precisamos estabelecer uma ordem entre os elementos de um conjunto e considerar os distintos conjuntos formados por estes elementos, mas ordenados de forma diferente. Por exemplo, num campeonato nacional de futebol, um mesmo clube pode realizar um conjunto de partidas, mas existe a primeira, a segunda, etc. Temos aí o que se chama uma sequência ou sucessão de jogos que o clube realiza. A estes conjuntos de sequências ou progressões podemos estabelecer a seguinte definição:

“Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais” [7], e é representada por

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$$

onde o número natural tomado para índice indica a posição do elemento na sucessão. O  $a_1$  é o primeiro termo, o  $a_2$  é o segundo, e por consequência, o  $a_n$  é o  $n$ ésimo termo, ou seja, um elemento genérico denominado termo geral.

Esta sequência pode ser indicada de modo mais resumido, simplesmente por  $a_n$ , entendendo-se que  $n \in \mathbb{N}$ .

De um modo geral, dada uma função  $a_n = f(n)$ , definida para  $n \in \mathbb{N}$ , chamamos de  $f(n)$ , a imagem contida em  $\mathbb{R}$  (conjunto dos números reais). Deste modo, para

uma sucessão do tipo  $a_n$ , com  $\left(a_n = \frac{1}{n}\right)$  encontramos

$$a_1 = f(1) = 1, a_2 = f(2) = \frac{1}{2}, a_3 = f(3) = \frac{1}{3} \text{ e assim por diante.}$$

Podemos ainda considerar sequências  $a_n$  com  $n$  pertencendo a um subconjunto finito de  $\mathbb{N}$  do tipo  $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$  ou, em geral,  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Nestes casos temos uma sequência finita, de  $n$  elementos.

Nas próximas seções veremos as definições e fórmulas fundamentais dos casos particulares das sequências, as progressões geométricas e aritméticas, objetos de nosso estudo através da motivação pelos fractais.

## 1.1 Progressão Aritmética – PA

### Definição

Uma progressão aritmética, ou simplesmente PA é uma sequência onde cada termo, a partir do segundo é a soma do termo anterior com uma constante  $r$ , chamada a razão da progressão, ou seja, a sequência  $a_n$  chama-se uma PA de razão  $r$  quando:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### Fórmula do termo geral

Mostraremos agora uma fórmula que permite encontrar qualquer termo de uma PA sem precisar escrevê-la completamente.

Se a sequência  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ , é uma PA de razão  $r$ ,

$$a_2 = a_1 + 1r$$

$$a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$$

. . .

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (1.1)$$

Na fórmula:

$a_n$  é o  $n$ ésimo termo (termo geral);

$a_1$  é o primeiro termo;

$n$  é o número de termos.

A razão de uma PA, pode ser obtida, subtraindo o termo anterior (antecedente) do termo posterior (consequente), ou seja:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = r$$

### Classificação de uma PA

“A razão de uma PA pode ser um número positivo, negativo ou igual a zero”, [7], assim:

1º) Se  $r = 0$ , então a PA é denominada constante ou estacionária.

2º) Se  $r < 1$ , então a PA é decrescente.

3º) Se  $r > 1$ , então a PA é crescente.

### Soma dos n termos de uma PA

Uma PA finita qualquer com n termos e razão r

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$$

também pode ser representada por

$$(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \dots, a_n - 2r, a_n - r, a_n).$$

Podemos observar que “numa PA finita, a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos”, [4],  $a_1 + a_n$ .

Se queremos obter uma fórmula para o cálculo da soma  $S_n$  dos n termos daquela PA temos:

#### **Fórmula da soma**

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad (1.2)$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \quad (1.3)$$

Por adição de (1.2) e (1.3) obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como  $a_2$  e  $a_{n-1}$ ,  $a_3$  e  $a_{n-2}$  são eqüidistantes dos extremos, suas somas são iguais a  $(a_1 + a_n)$ ; logo:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) n$$

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) n}{2}} \quad (1.4)$$

## 1.2 Progressão Geométrica – PG

### Definição

Uma “progressão geométrica é uma seqüência de números não nulos em que cada termo posterior, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um

número fixo chamado razão da progressão”, [4], representada por  $q$ , ou seja, a sequência  $a_n$  chama-se uma PG de razão  $q$  quando:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

### Fórmula do termo geral de uma PG

Uma Progressão Geométrica finita, é uma coleção finita de números reais que possui as mesmas características que uma sequência geométrica, no entanto, possui um número finito de elementos.

Mostraremos aqui a fórmula do termo geral de uma PG, que permite encontrar qualquer termo sem precisar escrevê-la integralmente.

Se a sequência  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$ , é uma PG de razão  $q$ ,

$$a_2 = a_1 q^1$$

$$a_3 = a_2 q \rightarrow a_3 = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q \rightarrow a_4 = a_1 q^3$$

. . .

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

(1.5)

Na fórmula:

$a_n$  = termo geral;

$a_1$  = primeiro termo;

$n$  = número de termos.

A razão de uma PG pode ser obtida pela divisão do termo posterior(consequente) pelo anterior (antecedente), ou seja:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

### Classificação de uma PG

Uma PG pode ser classificada em:

a)  $q > 1$

Se  $a_1 > 0$ , a PG é crescente e o termo geral cresce indefinidamente.

Se  $a_1 < 0$ , a PG é decrescente e o termo geral decresce indefinidamente.

b)  $0 < q < 1$

Se  $a_1 > 0$ , a PG é decrescente.

Se  $a_1 < 0$ , a PG é crescente.

Em ambos os casos o termo geral tende a zero.

c)  $q = 1$

A PG é constante.

d)  $-1 < q < 0$

Os termos da PG oscilam entre valores positivos e negativos, mas o termo geral tende a zero.

e)  $q < -1$

Os termos da PG oscilam entre valores positivos e negativos. O valor absoluto do termo geral cresce indefinidamente mas não existe o limite do termo geral.

f)  $q = -1$

Os termos da PG oscilam entre valores positivos e negativos. O valor absoluto do termo geral é constante mas não existe o limite do termo geral.

### Soma dos n primeiros termos de uma PG

Se queremos obter uma fórmula para o cálculo da soma  $S_n$  dos n termos de uma PG finita,

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \text{ ou } (a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1})$$

temos:

#### **Fórmula da soma**

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \quad (1.6)$$

Multiplicamos ambos os membros desta igualdade pela razão q e obtemos:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad (1.7)$$

Pela subtração de (1.6) em (1.7) obtemos:

$$(1.7) - (1.6): qS_n - S_n = (a_1q + a_1q^2) + \dots + (a_1q^{n-1} + a_1q^n) - (a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1})$$

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 \rightarrow S_n = (q - 1) = a_1(q^n - 1)$$

Daí segue-se que, para uma PG finita qualquer  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , de razão  $q \neq 1$ , tem-se:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (1.8)$$

Podemos chegar a uma outra fórmula, para o mesmo cálculo da soma, do seguinte modo:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1}{q - 1}$$

isto é,

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} \quad (1.9)$$

Se  $q = 1$ , caso excluído nas fórmulas anteriores, a PG é constante e então é imediato que  $S_n = n \cdot a_1$ .

### Soma dos termos de uma PG infinita

A soma de uma PG infinita tanto pode aumentar quanto pode diminuir infinitamente. Quando  $n$  tende ao infinito, podem acontecer dois casos:

**1º caso:**  $a_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow q > 1$

Para os valores da razão  $q$  maiores do que um, os termos vão ficando cada vez maiores até que o termo geral  $a_n$  atinja um número tão grande quanto se queira e é fácil notar que a soma tenderá também a um valor infinito.

$$S \rightarrow \infty \text{ (a soma tende a } \infty \text{)}$$

**2º caso:**  $a_n \rightarrow 0 < q < 1$

Para os valores da razão  $q$  menores do que um e maiores do que zero, a medida que  $n$  vai aumentando os termos vão diminuindo. E podemos fazer com que o último termo seja tão pequeno quanto queiramos.

$$a_n \rightarrow 0 \text{ (o último termo tende a zero).}$$

E na expressão:

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1} \quad \{ a_n \rightarrow 0$$

$$S_n = \frac{-a_1}{q - 1}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1}{1 - q}} \quad (1.10)$$

Chamamos esta “soma” de “limite da soma”.

Nos próximos capítulos abordaremos o tema fractais, escrevendo sobre a sua origem, características e algumas aplicações para a motivação do ensino de progressões aritméticas e algébricas.

## 2 FRACTAIS

*Fractais são formas igualmente complexas no detalhe e na forma global.*

(Benoit B. Mandelbrot)

Os fractais vêm sendo estudados e denotados por Geometria Fractal, termo introduzido em 1975 por Benoit B. Mandelbrot, matemático polonês, que difundiu amplamente essa geometria [8]. A palavra fractal baseia-se no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo *fragere* correspondente significa quebrar, fraturar ou interromper e foi associada aos cognatos ingleses *fracture* (fratura) e *fraction* (fração).

O termo fractal aplica-se, em geral, às construções diversas, englobando uma gama de figuras que sequer podem ser agrupadas à alguma categoria convencionada, pela diversidade das formas e características bizarras que possuem. Apesar de terem esta aparência confusa e bagunçada, quando olhadas matematicamente sua análise denota figuras regulares e apresenta comportamentos curiosos, como o de se assemelharem a elas mesmas quando observadas de diferentes escalas de tamanho.

A construção dos fractais demanda processos iterativos, por isso, não é possível sua representação fiel, visto que, tais processos são infinitos. Os fractais se popularizaram a partir da década de 80, com o avanço da informática, o que permitiu maior precisão na confecção de imagens de fractais.

Devido a estas características, estabelecer uma definição para o termo fractal é extremamente difícil, sendo que o próprio Mandelbrot em seu primeiro livro sobre fractais, datado de 1975 [8], evita dar uma definição matemática formal do termo.

Na próxima seção, veremos as principais características dos fractais, através das quais, podemos estabelecer uma definição de fractal.

### 2.1 Características dos fractais

Kenneth Falconer, em seu livro *Techniques in Fractal Geometry*, afirma que um fractal geralmente possui todas ou a maioria das características descritas a seguir [8,11]:

- **Estrutura fina**

A estrutura fina consiste em detalhamento infinito. Sucessivas ampliações de um fractal levam a mais e mais detalhes, indefinidamente. Isso não ocorre com as figuras geométricas convencionais. Nos fractais a cada ampliação surgem mais detalhes, mesmo que se repita o processo indefinidamente. Se o fractal for construído na tela gráfica de um computador, os detalhes aparecerão nas ampliações sucessivas, até onde o computador suportar a realização dessas ampliações.

- **Auto-afinidade**

A auto-afinidade ou auto-similaridade, também chamada por Mandelbrot de homotetia interna, consiste em se poder obter réplicas menores da figura através de sua divisão (no caso dos fractais, de sua ampliação). Quando as réplicas são sempre idênticas e obtidas através do mesmo fator de redução, diz-se que a figura possui auto-similaridade estrita.

- **Simplicidade na lei de formação**

A lei de formação do fractal é o processo que é repetido a cada iteração. De fato, geralmente esse procedimento a ser repetido é bastante simples. No caso do conjunto de Cantor, que veremos em capítulo próprio, a lei de formação é: divide-se cada segmento em 3 partes, e retira-se o terço médio.

- **Difícil descrição**

O fractal não pode ser descrito de maneira simples por uma função analítica ou em linguagem geométrica tradicional. Isso se deve ao fato de que o fractal é construído através de processos iterativos. É impossível representá-lo por uma função simples.

- **Dimensão Fractal**

A dimensão fractal diz respeito a dimensão espacial, ou seja, ao espaço que a figura ocupa. A dimensão fractal é estritamente maior que a sua dimensão topológica e pode ser calculada de várias formas. Se a figura não possuir auto-similaridade, um método gráfico corretamente utilizado é o de contagem de caixas. Se possuir, como é o caso do conjunto de Cantor, podemos calcular a dimensão por

outro método um pouco mais simples. Maiores detalhes sobre dimensão encontraremos em [8,13].

Todas estas características procuram definir um fractal, e como foi mencionado, os fractais reúnem algumas delas ou todas. A seguir nos utilizaremos destas características para mostrar alguns fractais que irão incrementar nosso estudo sobre PA e PG, iniciando pela clássica Curva de Koch.

## 2.2 Curva de Koch

O matemático Niels Fabian Helge Von Koch (Figura 1), nasceu no dia 25 de janeiro de 1870 em Estocolmo, Suécia. Estudou na Universidade de Estocolmo a partir de 1888. Publicou vários livros sobre Sistemas Lineares e Equações Diferenciais. Em 1911 iniciou sua carreira de professor na Universidade onde estudou. Ele faleceu em 11 de março de 1924, na cidade onde nasceu [8].



Figura 1: Niels Fabian Helge von Koch

Conforme [3], Koch idealizou alguns dos mais famosos fractais existentes – a “Curva de Koch” e o “Floco de Neve de Koch”. Ambas foram exibidas pela primeira vez em 1904 e ganharam tamanha notoriedade devido as características patológicas e incomuns que apresentam. A Curva de Koch, apesar de ser uma curva limitada, possui comprimento infinito. O floco de neve é uma figura geométrica que delimita uma área finita por um perímetro infinito. Além disso, ambas mantêm a característica topológica de uma curva de dimensão unitária, uma vez que elas não se intersectam em nenhum ponto.

## Obtenção da curva de Koch

A curva de Koch é uma curva gerada fazendo cópias de cópias. A construção resulta na auto-semelhança e isto aparece quando, por exemplo, escolhemos numa determinada fase um segmento a ser substituído e observamos que ele gerará a seguir uma curva semelhante à curva completa de Koch [1].

Para entendermos melhor este processo, vamos construir a curva de Koch. Considere inicialmente um segmento de reta e siga os três passos conforme segue:

- 1- Dividir o segmento em 3 partes iguais.
- 2- Substituir o segmento central por um triângulo equilátero sem a base.
- 3- Repetir, indefinidamente, os passos anteriores para cada um dos segmentos da nova figura.

A figura 2 a seguir, parte do nível 1 e detalha as etapas deste processo. Devemos lembrar que o nível 0 é representado por um segmento de reta.

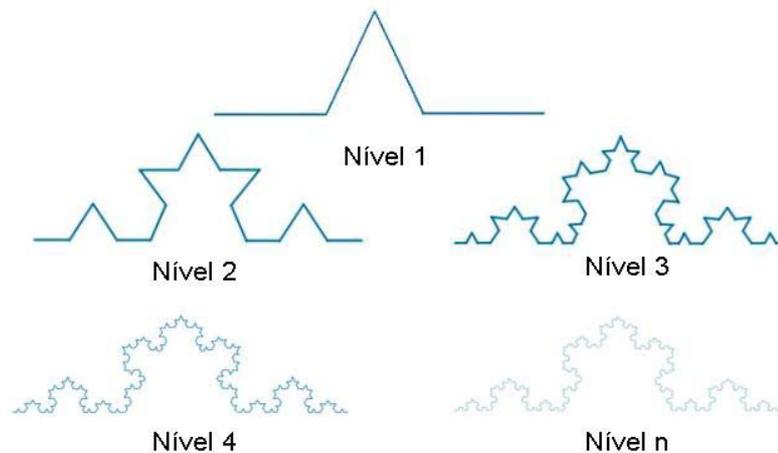


Figura 2: Processo para a construção da curva de Koch.

## Características fractais da curva de Koch

As principais características apresentadas pela curva de Koch são:

- Auto semelhança: é possível encontrar em cada nível da curva de Koch quatro cópias da figura no nível anterior, em tamanho reduzido, sendo que, para cada uma dessas quatro partes ocorre o mesmo. Deste modo, vemos que a auto semelhança é encontrada em cada parte da figura não importando qual está sendo observada.

- Estrutura fina: não importa o quanto ampliamos a curva de Koch, a quantidade de detalhes que vemos continua sendo grande.
- Fácil construção: o processo de obtenção da curva é simples com apenas três passos repetidos indefinidamente.
- Difícil descrição matemática: apesar da facilidade da construção, não existe uma função analítica simples que descreva a curva de Koch.

### Aplicações da curva de Koch em PG

Considere que o segmento inicial no algoritmo da curva de Koch tenha comprimento  $\ell$ . Aplicamos o algoritmo de construção no nível 0, que possui um segmento de tamanho  $\ell$  e o comprimento total da curva também  $\ell$ . Para o nível 1, encontramos 4 segmentos de comprimento  $\frac{\ell}{3}$ . O tamanho da curva passa a ser 4 vezes o comprimento deste segmento gerado.

No nível 2, aplicamos novamente a construção da curva de Koch. Temos agora, segmentos de tamanho  $\frac{\ell}{3^2}$ . O número de segmentos anterior ficou multiplicado por 4, assim, se obtivemos 4 segmentos no nível 1, agora teremos  $4^2$ , e o tamanho da curva passa a ser  $4^2 \frac{\ell}{3^2}$ . Obtemos assim, quatro novas figuras triangulares sem a base.

Este processo se repete indefinidamente até a sua generalização no nível da sua etapa  $n$ .

Ao estudarmos a curva de Koch, podemos construir uma tabela para melhor visualização. A Tabela 1, que veremos à seguir, foi obtida partindo-se do nível inicial zero da construção da curva e nos mostra detalhadamente todo o processo até a sua generalização.

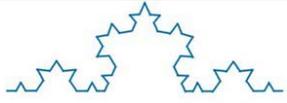
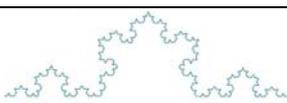
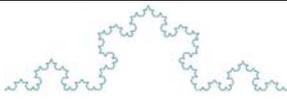
Em cada coluna procuramos mostrar as diversas etapas da construção com seus respectivos níveis, obtendo inicialmente uma coluna para as figuras e outra indicando em qual nível o processo se encontra.

A terceira coluna nos fornece o número de segmentos que a curva possui na etapa  $n$  de construção. A quarta coluna fornece o comprimento de cada um destes

segmentos. Note que de um nível para outro, cada segmento dá origem a quatro novos segmentos reduzidos do fator  $1/3$ .

Finalmente, o comprimento total da curva resulta do produto do número de segmentos pelo comprimento de cada um dos segmentos gerados em cada nível.

Tabela 1: Curva de Koch

	Nível	Nº de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total da curva
	0	1	$l$	$l$
	1	4	$\frac{l}{3}$	$4 \frac{l}{3}$
	2	$4^2$	$\frac{l}{3^2}$	$4^2 \frac{l}{3^2}$
	3	$4^3$	$\frac{l}{3^3}$	$4^3 \frac{l}{3^3}$
	4	$4^4$	$\frac{l}{3^4}$	$4^4 \frac{l}{3^4}$
...	...	...	...	...
	N	$4^n$	$\frac{l}{3^n}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n l$

Perceba que ao passo que evoluímos na construção da curva, obtemos como resultado progressões geométricas crescentes e decrescentes.

Veja o comprimento do segmento. Temos inicialmente um segmento de tamanho  $l$ . Obtemos sucessivamente,  $\left(\frac{l}{3}, \frac{l}{3^3}, \frac{l}{3^3}, \dots, \frac{l}{3^n}, \dots\right)$  que é uma PG com

$a_1 = \frac{l}{3}$  e  $q = \frac{1}{3}$ . Portanto uma PG decrescente, com razão menor do que 1 e termo geral que tende a zero.

Observe que o comprimento total da curva, também é iniciado com um segmento de tamanho  $l$ . Ao aplicarmos sucessivamente o algoritmo de construção obtemos  $\left(4 \frac{l}{3}, 4^2 \frac{l}{3^2}, 4^3 \frac{l}{3^3}, \dots, \left(\frac{4}{3}\right)^n l, \dots\right)$ , que é uma PG com  $a_1 = 4 \frac{l}{3}$  e  $q = \frac{4}{3}$ . Neste

caso, tem-se uma PG crescente, com o termo geral que tende para o infinito. Finalmente, o número de segmentos é uma PG com  $a_1=4$  e  $q=4$ , e também é crescente, mas, com o termo geral tendendo para o infinito.

Podemos ressaltar ainda que, mesmo a curva tendo seu perímetro crescendo infinitamente, não conseguimos visualizá-la até o final do processo. O mesmo observamos para o tamanho do segmento, que diminui infinitamente mas nunca irá desaparecer por completo. A tecnologia dos nossos computadores não possui capacidade para tal visualização, já que o processo se repete indefinidamente.

Fatos como estes instigam o aluno e podem aguçar a sua imaginação, tornando a aula mais motivadora.

### 2.2.1 Floco de Neve de Koch

O nome desse fractal vem da sua semelhança com as representações geométricas feitas de um floco de neve.

De acordo com [3], cada floco de neve de Koch possui um triângulo equilátero como iniciador da curva de Koch. No floco de neve pode-se perceber mais facilmente as características incomuns desses fractais, pois temos uma figura regular fechada de perímetro infinito cercado uma área finita, que, em termos simples, nunca será maior que a área da circunferência circunscrita ao triângulo equilátero iniciador. As expressões que fornecem a área e o perímetro exatos para o floco de neve podem ser facilmente determinadas através da soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica partindo-se de um triângulo equilátero.

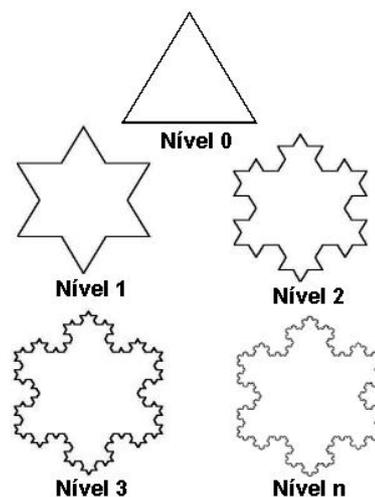


Figura 3: Níveis do Floco de Neve de Koch

## Aplicações do floco de neve de Koch em PG

O processo de construção do floco de neve de Koch é basicamente a repetição do que já foi visto na curva de Koch, e difere apenas por aplicarmos o algoritmo em três curvas que se unem formando um triângulo equilátero. Por este motivo, ao construirmos nossa tabela, trabalharemos apenas com aquelas colunas que ainda não estudamos, ou seja, a área de cada triângulo inserido e o número de triângulos inseridos.

A Tabela 2 que segue, foi obtida partindo-se do nível inicial zero da construção do floco de neve de Koch e nos mostra detalhadamente todo o processo até a sua generalização na etapa  $n$ .

Ressaltamos que, o uso do triângulo equilátero, é conveniente por questões estéticas e para termos uma melhor visualização do processo, além de facilitar a construção do floco de neve propriamente dito. Mas, isto não impede que o mesmo seja construído utilizando qualquer outro triângulo.

Cabe ainda aqui destacar que, ao trabalharmos com área do triângulo equilátero de lado  $\ell$ , usamos a fórmula da área, própria para este triângulo,  $A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2$ , que no seu nível inicial 0, será denotada por  $A_0$ . Podemos encontrar detalhes sobre a obtenção desta fórmula em [5].

Tomamos então, a área inicial do triângulo equilátero:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2$$

No nível  $n=1$ , temos que o comprimento de cada segmento é  $\frac{\ell}{3}$ . Substituindo na fórmula da área do triângulo equilátero, temos

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{\ell}{3} \right)^2$$

Como  $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2$ , substituindo na área do nível inicial 1, verificamos que:

$$A_1 = \frac{A_0}{3^2}$$

Este processo se repete indefinidamente.

Tabela 2: Floco de Neve de Koch

	Nível	Nº de segm.	Comp. de cada lado	Compr. total da curva	Área de cada triângulo inserido	Nº de triâng. inser.	Soma da área total
	0	3.1	. $\ell$	$3\ell$	$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2$	0	$A_0$
	1	3.4	$\frac{\ell}{3}$	$3.4 \frac{\ell}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\ell^2}{3^2} = \frac{A_0}{3^2}$	3	$A_0 + 3 \frac{A_0}{3^2}$
	2	$3.4^2$	$\frac{\ell}{3^2}$	$3.4^2 \frac{\ell}{3^2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\ell^2}{3^4} = \frac{A_0}{3^4}$	3.4	$A_0 + 3 \frac{A_0}{3^2} + 3.4 \frac{A_0}{3^4}$
	3	$3.4^3$	$\frac{\ell}{3^3}$	$3.4^3 \frac{\ell}{3^3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\ell^2}{3^6} = \frac{A_0}{3^6}$	$3.4^2$	$A_0 + 3 \frac{A_0}{3^2} + 3.4 \frac{A_0}{3^4} + 3.4^2 \frac{A_0}{3^6}$
	4	$3.4^4$	$\frac{\ell}{3^4}$	$3.4^4 \frac{\ell}{3^4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\ell^2}{3^8} = \frac{A_0}{3^8}$	$3.4^3$	$A_0 + 3 \frac{A_0}{3^2} + 3.4 \frac{A_0}{3^4} + 3.4^2 \frac{A_0}{3^6} + 3.4^3 \frac{A_0}{3^8}$
	...	...	...	...	...	...	...
	n	$3.4^n$	$\frac{\ell}{3^n}$	$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \ell$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\ell^2}{3^{2n}} = \frac{A_0}{3^{2n}}$	$3.4^{n-1}$	$A_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right)$

Veja a coluna que nos fornece a área de cada triângulo inserido. Temos aqui uma sequência  $\left( \frac{A_0}{3^2}, \frac{A_0}{3^4}, \frac{A_0}{3^6}, \frac{A_0}{3^8}, \frac{A_0}{3^{2n}}, \dots \right)$  que é uma PG decrescente, com o termo inicial  $a_1 = \frac{A_0}{3^2}$ , razão  $q = \frac{1}{3^2}$ , e o termo geral tende para zero, já que  $0 < q < 1$ .

Na última coluna, a da soma total da área, partimos da mesma área inicial  $A_0$ . Como é uma soma de áreas, vamos agregando cada área gerada pelos novos triângulos inseridos, multiplicados pelo número de triângulos que surgem em cada nível. A seguinte equação é então estabelecida :

$$A_0 + 3 \frac{A_0}{3^2} + 3.4 \frac{A_0}{3^4} + 3.4^2 \frac{A_0}{3^6} + 3.4^3 \frac{A_0}{3^8} + \dots + 3.4^{n-1} \frac{A_0}{3^{2n}}$$

Isolando o  $A_0$ , vêm

Assim, encontramos o somatório da área total do floco de neve no nível  $n$ :

$$A_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{9} \right)^{n-1} \right)$$

Note que o somatório resultante: (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{9} \right)^{n-1}$$

corresponde ao somatório infinito de uma progressão geométrica (PG) de razão

$q = \frac{4}{9}$ , cujo primeiro termo é  $a_1 = 1$ . Sabemos que, quando  $0 < q < 1$ , o somatório da

PG converge para  $\frac{a_1}{(1-q)}$ . Deste modo :

$$S = \frac{9}{5}$$

Substituindo em (1), temos que a área total da curva de Koch tende para

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{5} \ell^2$$

Comparando a área do triângulo inicial com a área do floco de neve, percebemos que o triângulo inicial representa  $\frac{8}{5}$  da área do fractal em questão.

Na próxima seção, veremos o fractal triângulo de Sierpinski, que é um fractal obtido através de remoção de triângulos e tem como diferencial sua beleza indiscutível.

### 2.3. Triângulo de Sierpinski

Waclaw Sierpinski (1882-1969) (figura 4), matemático polonês, lecionou em Lvov e Wariaw. Publicou 724 artigos e 50 livros e teve grande reputação, principalmente na década de 1920-1930, a ponto de uma das crateras lunares ter o seu nome. Suas áreas de pesquisa predominantes foram a Teoria dos Números e a Teoria dos Conjuntos, [8].



Figura 4: Waclaw Sierpinski

Entre suas obras mais famosas, destacam-se em 1916 “*Comptes Rendus de l’Academie des Sciences de Paris*”, e em 1928 “*Leçons sur les nombres transfinis*”, [1].

### **Construção do Triângulo de Sierpinski por remoção de triângulos**

Para a construção do triângulo de Sierpinski existem diferentes processos. Podemos citar alguns, como por sorteio de pontos, através de quadrados, ou através do triângulo numérico. Algumas destas construções poderão ser encontradas em [2]. A mais comum, e que irá interessar o presente estudo, é a construção por remoção de triângulos, utilizando um triângulo equilátero como figura inicial.

Perceba que novamente o triângulo equilátero será nosso ponto de partida. O motivo de sua utilização, já exposto anteriormente, dá-se pela conveniência e por questões estéticas, além de uma melhor visualização da figura em si. Este fato não impede que o mesmo seja construído utilizando qualquer outro tipo de triângulo.

O processo de construção do triângulo de Sierpinski por remoção de triângulos segue estes passos:

- Partimos de uma superfície delimitada por um triângulo equilátero totalmente preenchido no plano, sobre o qual aplicamos sistemas repetitivos de operações.
- marcamos os pontos médios de cada um dos três segmentos que delimitam o triângulo obtendo-se um novo triângulo central de vértices nos pontos médios do triângulo maior;
- ligamos esses três pontos médios e obtemos quatro triângulos congruentes, cujo lado é a metade do lado do triângulo original e a área é  $\frac{1}{4}$  da área deste triângulo;
- retiramos o triângulo central, ficando 3 novos triângulos equiláteros;

- repetimos indefinidamente os três últimos passos com os triângulos restantes, deixando sempre os triângulos centrais surgirem nos pequenos grupos como se fossem buracos.

A figura 5 que segue, apresenta os níveis da construção do triângulo de Sierpinski até a sua generalização no nível  $n$ .

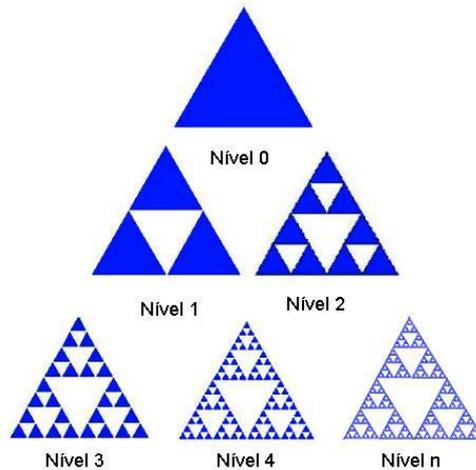


Figura 5: Construção do triângulo de Sierpinski por remoção.

### Características Fractais

O triângulo de Sierpinski apresenta todas as características fractais mencionadas na seção 2.1:

- estrutura fina;
- auto-similaridade estrita;
- simplicidade na lei de formação;
- o processo de construção é repetitivo;
- o fractal não é descrito de modo analiticamente simples.

### Aplicações do triângulo de Sierpinski em PG

Denotaremos por  $A_0$ , com estudo detalhado em [5], a área do triângulo equilátero inicial e  $\ell$  o tamanho do lado.

Definidos nossos elementos, iniciamos a construção propriamente dita do triângulo de Sierpinski.

Seja o nível inicial 0, onde temos apenas um triângulo de área  $A_0$ , de lado  $\ell$  e perímetro  $3\ell$ . Vamos aplicar sucessivamente o algoritmo de construção da curva, conforme descrição anterior.

No nível 1, obtemos 4 triângulos e retiramos o central. Cada lado do triângulo terá seu comprimento reduzido à metade, ou seja,  $\frac{\ell}{2}$ . O perímetro de cada nova figura gerada também será reduzido à metade, assim, temos  $\frac{3\ell}{2}$ .

Analisando o perímetro total, podemos verificar que ele é formado pelo perímetro de cada triângulo multiplicado pelos três novos triângulos formados. Já a área de cada um dos três novos triângulos é reduzida à sua quarta parte, visto que, o triângulo maior foi dividido em quatro triângulos equiláteros congruentes, e retiramos o triângulo central.

Note que a área total é a área de cada triângulo multiplicada pelo número de triângulos existentes, desta forma, esta área passa a ser  $3\frac{A_0}{4}$ .

À medida que evoluímos nos níveis da construção do triângulo de Sierpinski, podemos usar uma tabela para uma melhor visualização do processo, aplicando em cada nível, a construção vista anteriormente.

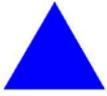
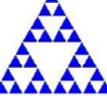
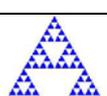
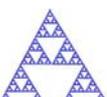
A Tabela 3 foi desenvolvida a partir do nível 0. A primeira e segunda colunas indicam os nível e as respectivas figuras resultantes do processo.

A terceira coluna nos fornece o número de triângulos gerados. Já a quarta coluna nos fornece o comprimento do lado de cada um destes novos triângulos. Ressaltamos que, à medida que aplicamos o algoritmo de construção, o lado destes novos triângulos sempre será reduzido à metade do lado do triângulo anterior.

A coluna perímetro de cada triângulo, é resultado do produto dos três lados de cada novo triângulo pelo comprimento do lado na sua etapa  $n$ . Já o perímetro total é obtido pelo resultado do produto da coluna do perímetro de cada triângulo, pela coluna do número de triângulos formados em cada nível.

Na coluna área de cada triângulo, temos a área inicial  $A_0$  dividida pelos novos triângulos gerados. Finalmente, a coluna da área total é resultado do produto da área de cada triângulo pelo número de novos triângulos gerados em cada nível.

Tabela 3: Curva triângulo de Sierpinski

	Nível	Número de triângulos	Comp. do lado	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total	Área de cada triângulo	Área total
	0	1	$\ell$	$3\ell$	$3\ell$	$A_0$	$A_0$
	1	3	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{3\ell}{2}$	$3\frac{3\ell}{2}$	$\frac{A_0}{4}$	$3\frac{A_0}{4}$
	2	$3^2$	$\frac{\ell}{2^2}$	$\frac{3\ell}{2^2}$	$3^2\frac{3\ell}{2^2}$	$\frac{A_0}{4^2}$	$3^2\frac{A_0}{4^2}$
	3	$3^3$	$\frac{\ell}{2^3}$	$\frac{3\ell}{2^3}$	$3^3\frac{3\ell}{2^3}$	$\frac{A_0}{4^3}$	$3^3\frac{A_0}{4^3}$
	4	$3^4$	$\frac{\ell}{2^4}$	$\frac{3\ell}{2^4}$	$3^4\frac{3\ell}{2^4}$	$\frac{A_0}{4^4}$	$3^4\frac{A_0}{4^4}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n	$3^n$	$\frac{\ell}{2^n}$	$\frac{3\ell}{2^n}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^n 3\ell$	$\frac{A_0}{4^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$

Analisando a construção do triângulo de Sierpinski, encontramos várias Progressões Geométricas que podem ser usadas como motivadoras em sala de aula.

Veja a área  $A_0$  inicial. No próximo nível ela é dividida por 4, assim sucessivamente obtemos:  $\left(\frac{A_0}{4}, \frac{A_0}{4^2}, \frac{A_0}{4^3}, \frac{A_0}{4^4}, \dots, \frac{A_0}{4^n}, \dots\right)$ , que é uma PG decrescente,

com  $a_1 = \frac{A_0}{4}$  e  $q = \frac{1}{4}$ . Como  $0 < q < 1$ , o termo geral tende a zero.

O perímetro total, parte do nível inicial  $3\ell$ , e ao avançarmos nas iterações surge a sequência:  $\left(3\frac{3\ell}{2}, 3^2\frac{3\ell}{2^2}, 3^3\frac{3\ell}{2^3}, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^n 3\ell, \dots\right)$  que é uma PG crescente, com

$a_1 = 3\frac{3\ell}{2}$  e  $q = \frac{3}{2}$ , e cujo termo geral tende a infinito, pois  $q > 1$ .

O número de triângulos forma uma PG crescente com  $a_1=3$ ,  $q=3$  e o termo geral tende para o infinito. E, finalmente, o comprimento do lado e o perímetro de cada triângulo, são PGs decrescentes com  $a_1=\frac{\ell}{2}$ ,  $q=\frac{1}{2}$  e  $a_1=\frac{3\ell}{2}$ ,  $q=\frac{1}{3}$ , respectivamente, e ambos os termos gerais tentem a zero.

O triângulo de Sierpinski, como os outros fractais, além de chamar a atenção por sua beleza, consiste em uma ferramenta prática e atrativa para motivar a aplicação das progressões geométricas em sala de aula. Podemos explorar os conceitos de sequências crescentes, decrescentes, finitas e infinitas, e também trabalhar com figuras geométricas planas, interagindo a geometria no auxílio da temática das progressões.

## 2.4 Curva de Cantor

*"O melhor produto de um gênio matemático e uma das realizações supremas da atividade humana puramente intelectual".*  
(Hilbert)

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (1845-1918) (Figura 6), matemático descendente de portugueses, nascido na Rússia, adotou nacionalidade alemã. Foi professor da Universidade de Hale, e em 1867 completou seu doutorado, na Universidade de Berlim. Dedicou a maior parte dos seus estudos ao que atualmente conhecemos como Teoria dos Conjuntos, amplamente difundida e aplicada até hoje, [8].



Figura 6: Georg F.L.P. Cantor

Cantor, em 1883, publicou um trabalho no qual é construído um conjunto, chamado hoje "Conjunto de Cantor" ou "Poeira de Cantor" que iremos estudar nesta seção.

## Obtenção da curva de Cantor

A construção da curva de Cantor pode ser obtida por construção numérica ou construção geométrica [1]. Sendo a construção numérica um tanto complexa, deixamos o seu estudo a cargo do leitor, caso haja interesse. Detalhes sobre a curva de Cantor através da construção numérica poderá ser encontrada em [1]. A maneira mais prática, e que irá interessar o presente trabalho, é a construção geométrica.

Para construirmos o Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor, utilizamos o seguinte algoritmo:

- Iniciamos com um segmento de reta.
- Este segmento é então dividido em três segmentos de igual medida e retiramos o terço médio (segmento central).
- Em cada nível os segmentos que surgem são divididos novamente em três segmentos de igual medida e retiramos o segmento central.
- Repetimos, indefinidamente, este processo em cada um dos novos segmentos.

A figura 7 representa a curva de Cantor, ou poeira de Cantor.

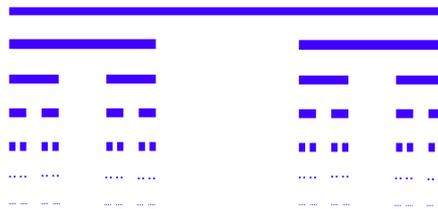


Figura 7: Curva de Cantor.

## Características Fractais

Estas são as principais características apresentadas pela Curva de Cantor:

- Auto semelhança: é possível encontrar em cada nível da curva de Cantor duas cópias da figura no nível anterior, em tamanho reduzido, sendo que, para cada uma dessas duas partes ocorre o mesmo.
- Simplicidade na lei de formação: o processo de obtenção da curva é simples com apenas dois passos repetidos indefinidamente.
- Dificil descrição matemática: apesar da facilidade da construção, não existe uma função analítica simples que descreva a curva de Cantor.
- o processo de construção é repetitivo.

## Aplicações da curva de Cantor em PG

Considere que o segmento inicial no algoritmo da curva de Cantor tenha comprimento  $\ell$ , no nível inicial 0.

No nível seguinte, ao aplicarmos o algoritmo de construção, obtemos 2 segmentos de tamanho reduzido a  $\frac{1}{3}$ , ou  $\frac{\ell}{3}$ . O comprimento total da curva, passa a ser  $\frac{2}{3}\ell$ , pois este é o resultado do produto do número de segmentos pelo comprimento dos mesmos. O processo de construção pode ser aplicado indefinidamente ou até o nível que se queira.

Além de outras aplicações, as curvas são, como já mencionado, um ótimo estímulo para a construção de tabelas. Iremos mais uma vez, representar através de uma tabela a evolução da curva, para verificarmos cada detalhe do processo.

Observe que as duas primeiras colunas da Tabela 4 nos fornecem as figuras geradas em cada um dos seus respectivos níveis. Perceba que o número de segmentos nos mostra quantos novos segmentos são gerados a cada iteração.

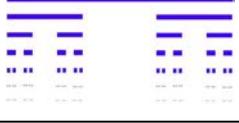
A coluna comprimento do segmento, trás o segmento inicial  $\ell$  reduzido à sua terça parte. Finalmente, a coluna do comprimento do conjunto, nos fornece o resultado do produto do número de segmentos pelo comprimento de cada novo segmento.

Tabela 4: Curva de Cantor

	Nível	Nº de segmentos	Comprimento do segmento	Comprimento do conjunto
	0	1	$\ell$	$\ell$
	1	2	$\frac{\ell}{3}$	$\frac{2}{3}\ell$
	2	$2^2$	$\frac{\ell}{3^2}$	$\frac{2^2}{3^2}\ell$
	3	$2^3$	$\frac{\ell}{3^3}$	$\frac{2^3}{3^3}\ell$
	4	$2^4$	$\frac{\ell}{3^4}$	$\frac{2^4}{3^4}\ell$

Continua...

Tabela 4: Curva de Cantor (...continuação).

...	...	...	...	...
	N	$2^n$	$\frac{\ell}{3^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^n \ell$

Veja que o comportamento do número de segmentos, resulta em uma PG crescente com  $a_1=2$  e  $q=2$ . Ela inicia com 1 segmento e cresce exponencialmente:  $(2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots)$ , com o termo geral tendendo para o infinito.

Já o comprimento de cada segmento e o comprimento total da curva são PGs decrescentes, com os termos gerais tendendo a zero, com  $a_1 = \frac{\ell}{3}$ ,  $q = \frac{1}{3}$  e  $a_1 = \frac{2}{3} \ell$ ,  $q = \frac{2}{3}$ , respectivamente.

Veremos na próxima seção as árvores bifurcadas, que trazem como diferencial, além de todas as aplicações já vistas, Progressões Aritméticas.

## 2.5 Árvores bifurcadas

Como até o momento só havíamos discutido progressões geométricas, nosso estudo torna-se mais diversificado à partir desta curva, pois estaremos trabalhando também com progressões aritméticas.

As árvores mais conhecidas são as árvores pitagóricas, cuja figura inicial é um triângulo retângulo. Estas árvores não serão apresentadas nesta monografia e deixaremos a cargo do leitor o seu estudo em [1], caso haja interesse.

Veremos as árvores bifurcadas que possuem algumas variantes no ângulo de bifurcação e na escala de redução [1]. Nosso foco estará voltado à árvore com ângulo de bifurcação de  $120^\circ$  e escala de redução  $\frac{1}{2}$ , por ser bastante didática e melhor servir ao nosso propósito.

As árvores bifurcadas, além de proporcionarem todas as aplicações atribuídas anteriormente às outras curvas, também são um excelente tópico para trabalharmos com malha triangulada. A malha será apresentada no Capítulo 3, sobre construções de fractais utilizando a ferramenta Cabri-Gèomètre.

## Obtenção da curva

Para obtermos uma árvore bifurcada procedemos da seguinte forma:

- Iniciamos a curva com um segmento vertical de tamanho  $\ell$ .
- Aplicamos sobre este segmento inicial um fator de redução  $\frac{1}{2}$ .
- Inserimos dois segmentos de forma bifurcada junto a extremidade superior do segmento inicial, com ângulo de bifurcação de  $120^\circ$  e com o tamanho obtido na redução do nível anterior.
- Repetimos, indefinidamente, este processo em cada um dos novos segmentos.

A figura 8 mostra uma árvore com dois diferentes ângulos de bifurcação.

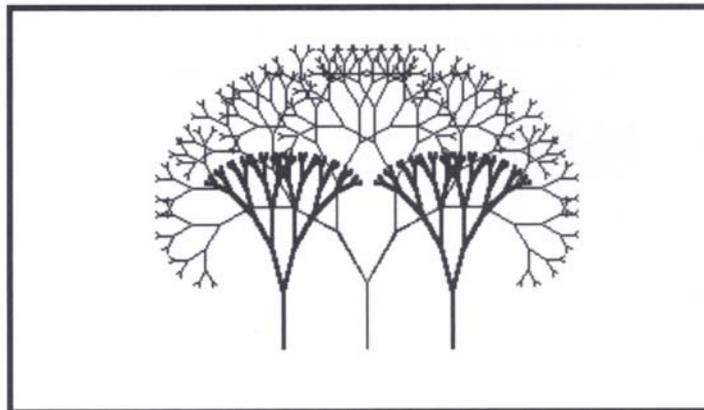


Figura 8: Árvore bifurcada.

## Características fractais

As árvores bifurcadas apresentam, entre outras, estas características:

- Estrutura fina, ou seja, seu detalhamento é infinito.
- Não pode ser descrita de maneira simples por uma função analítica ou em linguagem geométrica tradicional.
- Possui auto-similaridade estrita ou auto-afinidade, que consiste em se poder obter réplicas menores da figura através de sua divisão.
- Tem uma lei de formação simples.

## Aplicações das árvores em PA e PG

Para construirmos a curva árvores bifurcadas, também partimos de um elemento inicial, neste caso, um segmento vertical de comprimento  $\ell$ . Aplicamos o algoritmo de construção e assim, no nível 1, obtemos dois novos segmentos, com a metade do comprimento do segmento inicial e que somados ao primeiro, totalizarão 3 segmentos. O comprimento total da curva, será de  $2\ell$ .

No nível 2, aplicamos novamente o fator de redução  $\frac{1}{2}$ , obtendo novos segmentos, agora medindo  $\frac{\ell}{2^2}$ . O número total de segmentos neste nível é 7, e o comprimento total da curva é  $3\ell$ . Deste modo, em uma mesma curva observamos o surgimento de Progressões Geométricas e Aritméticas.

Como em todas as curvas, podemos obter uma tabela para melhor visualizar o seu comportamento, aplicar as progressões e, ao mesmo tempo, estimular os alunos na própria construção da tabela.

Nas primeira e segunda colunas da Tabela 5, estabelecemos para cada nova figura o seu respectivo nível. A terceira coluna nos fornece o número de novos segmentos que surgem a cada iteração. A coluna número total de segmentos é a sucessiva adição dos novos segmentos gerados em cada nível.

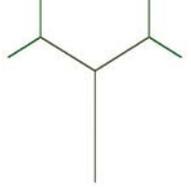
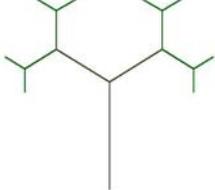
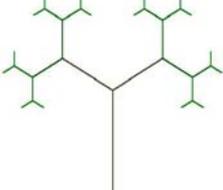
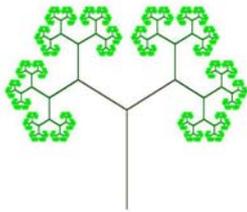
O comprimento de cada segmento, na quinta coluna, resulta da aplicação do fator de redução  $\frac{1}{2}$  sobre o segmento anterior. E, finalmente, a sexta e última coluna nos fornece o comprimento total da curva, que é a soma dos comprimentos de todos os segmentos.

Tabela 5: Árvores bifurcadas.

	Nível	Número de novos segmentos	Número total de segmentos	Comprimento de cada novo segmento	Comprimento total da curva
	0	-	1	$\ell$	$\ell$

Continua...

Tabela 5: Árvores bifurcadas (...continuação).

	1	2	$1+2$	$\frac{\ell}{2}$	$\ell + \frac{2\ell}{2} = 2\ell$
	2	$2^2$	$1+2+2^2$	$\frac{\ell}{2^2}$	$2\ell + \frac{2^2\ell}{2^2} = 3\ell$
	3	$2^3$	$1+2+2^2+2^3$	$\frac{\ell}{2^3}$	$3\ell + \frac{2^3\ell}{2^3} = 4\ell$
	4	$2^4$	$1+2^2+2^3+2^4$	$\frac{\ell}{2^4}$	$4\ell + \frac{2^4\ell}{2^4} = 5\ell$
...	...	...	...	...	...
	N	$2^n$	$1+2+2^2+2^3+..+2^n$	$\frac{\ell}{2^n}$	$(n+1)\ell$

Note que na coluna “número de novos segmentos”, partindo de 2 segmentos no nível 1, obtemos a sequência  $(2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n, \dots)$ . Uma PG crescente, com  $a_1=2$  e  $q=2$  e o termo geral tendendo ao infinito. Do comprimento de cada segmento que foi gerado de  $\ell$ , obtemos:  $\left(\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2^2}, \frac{\ell}{2^3}, \dots, \frac{\ell}{2^n}, \dots\right)$ . Uma PG decrescente, com  $a_1 = \frac{\ell}{2}$  e  $q = \frac{1}{2}$ , com termo geral tendendo a zero.

Veja que o número total de segmentos, partindo de 1 segmento inicial, é acrescido dos novos segmentos gerados em cada nível, assim, no nível 1 temos  $1 +$

2 segmentos, no nível 2, 1 + 6 segmentos, no nível 3, 1 + 14 segmentos e assim sucessivamente.

Observe que, ao detalharmos cada um dos níveis, este número total de segmentos está crescendo através da soma de uma PG de razão  $r = 2$ , com termo inicial  $a_1 = 2$  e termo geral  $a_n = 2^n$ . Podemos substituir na fórmula (1.9) da soma da PG, vista na seção 1.2, para melhor entendermos esta operação. Temos assim:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} \\ &= \frac{2 - 2^n 2}{1 - 2} \\ S_n &= 2^{n+1} - 2 \end{aligned}$$

Se o número total de segmentos é dado por 1 mais a soma de uma PG, então:

$$\text{Número total de segmentos} = 1 + S_n,$$

substituindo  $S_n$ , vem:

$$\text{Número total de segmentos} = 1 + 2^{n+1} - 2$$

$$\text{Número total de segmentos} = 2^{n+1} - 1,$$

que tende para o infinito pois  $q > 1$ .

Analisando agora o comprimento total da curva, verificamos o surgimento de uma PA. Iniciamos com o comprimento total da curva de tamanho  $\ell$ . No nível 1 encontramos  $2\ell$ , no nível 2,  $3\ell$ , e assim sucessivamente até o nível  $n$ , com  $(n+1)\ell$ . Uma PA de razão  $r = \ell$ , termo inicial  $a_1 = \ell$  e o termo geral tendendo ao infinito.

Na seção seguinte vamos trabalhar com uma curva muito interessante: a curva de Peano. Uma curva que contém muitas outras particularidades, além daquelas já vistas até o momento.

## 2.6 Curva de Peano

Giuseppe Peano (Figura 9), lógico e matemático italiano, nasceu em 27 de Agosto de 1858 em Cuneo, Itália. Formou-se em matemática na Universidade de Turim (1880). Foi professor nesta mesma Universidade desde 1890 e na *Real Academia de Artillería*, entre 1886 e 1901. Nesta época inventou uma curva que

preenche uma área plana (*curva de Peano*), cuja existência se supunha impossível, e que muito dinamizou a teoria dos conjuntos [8],[14].



Figura 9: Giuseppe Peano

### Algoritmo da construção da Curva de Peano

A curva de Peano pode ser obtida através das etapas que seguem:

- Iniciamos a construção com um segmento de reta.
- Dividimos este segmento em três partes iguais.
- Construimos um retângulo bissectado pelo terço médio, formando dois quadrados, um no semiplano superior e outro no semiplano inferior, com o lado igual ao terço médio do traço que lhe deu origem. Teremos assim, uma curva de nove segmentos, em escala de  $1/3$ .
- Substituímos cada segmento anterior pela curva de nove segmentos, usando os passos 1 e 2 indefinidamente.

Observando a evolução da curva (levando a construção anterior até uma infinidade de iterações), deduz-se que esta superfície será um losango completamente preenchido.

A figura 10 mostra as etapas da construção da curva de Peano. Neste caso, podemos visualizar apenas o semiplano superior.

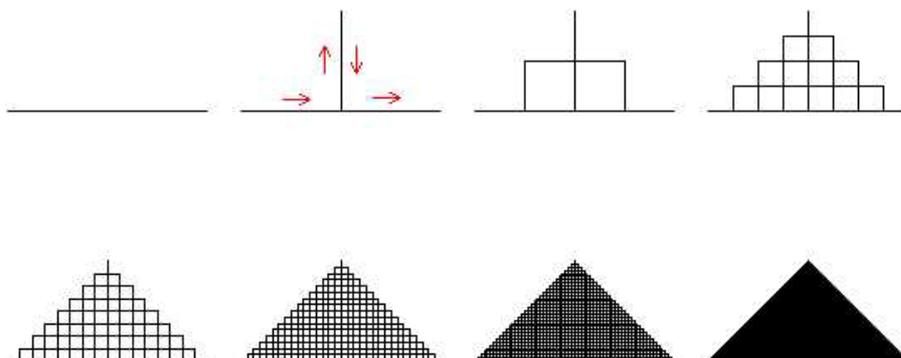


Figura 10: Etapas da construção do semiplano superior da Curva de Peano.

A Curva de Peano, além de todas as outras particularidades já vistas anteriormente, nos fornece uma PA característica e se destaca pelo fato de que até o presente trabalho ainda não existiam publicações semelhantes. Assim, temos um conteúdo inédito e extremamente interessante a ser explorado.

### **Características Fractais**

Esta curva possui as principais características dos Fractais:

- Auto-semelhança: A curva de Peano no nível 1 possui nove segmentos, como as substituições são efetuadas em cada um desses, podemos encontrar miniaturas da curva no nível 1 em nove partes do nível 2. Do mesmo modo poderemos encontrar nove miniaturas do nível 2 no nível 3, e assim sucessivamente;
- Estrutura-fina: ao ampliarmos a curva, não importando qual o fator de ampliação, não perderemos a quantidade de detalhes que ela possui;
- Fácil construção: o processo de obtenção da curva é simples com apenas um passo repetido indefinidamente;
- Difícil descrição analítica: não conseguimos descrever esta curva através de simples funções analíticas.

### **Aplicações da curva de Peano em PA e PG**

Deixamos propositadamente a curva de Peano como último fractal a ser estudado, devido a particularidades como a dedução de uma fórmula ainda não publicada em outra literatura e também pela sua maior complexidade. Basicamente, o algoritmo não foge à regra aos demais fractais. É bastante simples, mas o seu desenvolvimento, talvez como capítulo introdutório poderia levar o leitor ao desinteresse, visto que, em comparação aos demais fractais, extrapola um pouco pela diversidade de argumentos. Enfatizamos ainda, o que objetivo deste trabalho é motivar o ensino de progressões com o uso de fractais de maneira prática e simplificada.

Ao estudarmos a curva de Peano, primeiramente precisamos definir cada item que irá surgir no processo de construção.

No nível 1 já encontramos todos os elementos integrantes da curva, sendo eles:

$\ell$  = comprimento do segmento

$\ell^2$  = área do quadrado

$k_n$  = número de linhas ou “degraus” que constituirão o losango

$a_k$  = termo geral

$S_k$  = soma de quadrados

Considere um segmento de comprimento  $\ell$  para o nível inicial 0. Seguimos para o nível 1. Aplicamos o algoritmo de construção visto anteriormente, formando dois quadrados, um no nível superior, outro no nível inferior. Temos agora 9 segmentos de tamanho  $\frac{\ell}{3}$ .

O comprimento da curva foi multiplicado pelos 9 novos segmentos e pelo comprimento do segmento  $\frac{\ell}{3}$ , estando agora com  $3\ell$ . A área de cada um dos quadrados é definida por  $\left(\frac{\ell}{3}\right)^2$ , visto que o lado de cada quadrado foi dividido por 3.

O  $k_n$  é 1 pois temos apenas uma nova linha (degrau). O termo geral  $a_k$  e a soma dos quadrados em cada nível, superior e inferior também é 1, porque iniciamos com apenas um quadrado. A área total é o resultado do produto do número de quadrados formados nos níveis inferior e superior, pela área de cada quadrado, assim a área total é  $2\left(\frac{\ell}{3}\right)^2$ .

Aplicamos novamente o algoritmo de construção da curva de Peano, e definimos assim, o nível 2. Temos agora  $9^2$  segmentos e cada um deles, de tamanho  $\frac{\ell}{3^2}$ . Como o comprimento total da curva é o produto do número de segmentos pelo seu comprimento, obtemos agora  $3^2\ell$ .

A área de cada quadrado é  $\left(\frac{\ell}{3^2}\right)^2$ . Temos agora 4 linhas (degraus), em cada semiplano e o termo geral, ou  $a_4 = 7$ , pois obtemos na linha horizontal, fronteira aos dois semiplanos, 7 novos quadrados.

A soma de quadrados, que é o número total de quadrados formados em cada semiplano é  $S_4 = 4^2$ . O número total de quadrados em ambos os semiplanos é o dobro da soma de quadrados, ou seja  $2.4^2$ . Finalmente, a área total, que é resultante do produto do número de quadrados dos dois semiplanos pela área de cada quadrado, e que é de  $32\left(\frac{\ell}{3^2}\right)^2$ .

Ao darmos continuidade na construção da curva, podemos perceber a beleza deste trabalho. Entendemos que esta curva possui um grau de dificuldade um pouco maior que as anteriores, por este motivo daremos maior atenção ao assunto.

Iremos agora analisar cada nível dessa curva construindo novamente uma tabela (Tabela 6), que nos mostrará todos os detalhes do seu comportamento, à medida que evolui indefinidamente até o nível  $n$ .

Para um perfeito entendimento da curva, vamos detalhar alguns dos itens desenvolvidos. O número de linhas (degraus)  $k_n$  vem ilustrado através da figura 11.

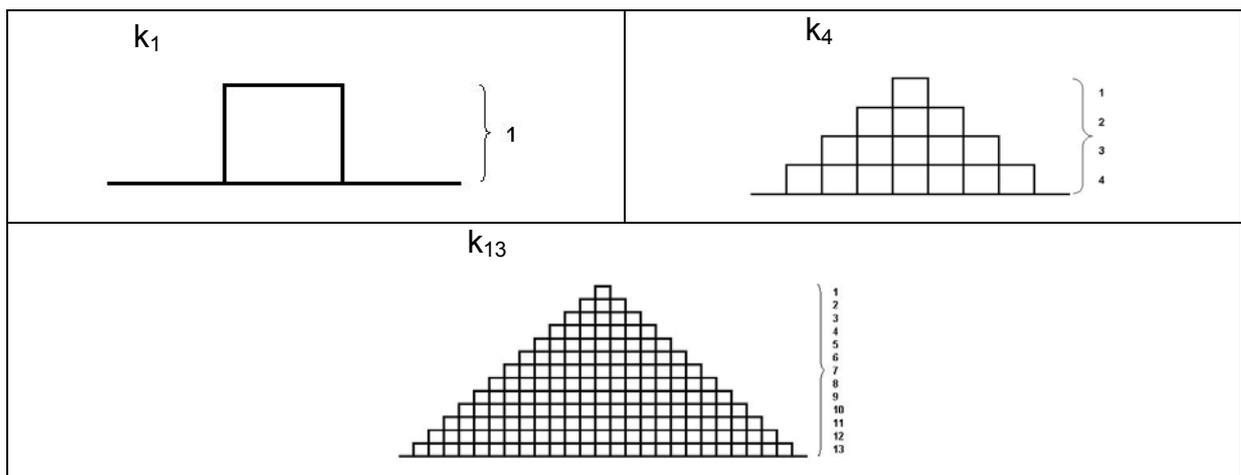


Figura 11: Número de linhas (degraus) de cada semiplano.

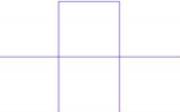
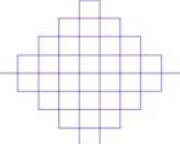
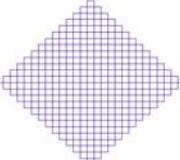
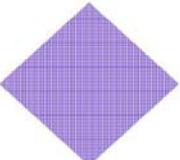
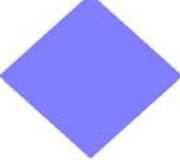
Admitindo que  $k_n$  seja o número de linhas (degraus) de cada semiplano, temos então:

$$\text{Dados extraídos da tabela} \left\{ \begin{array}{l} k_1 = 3.0 + 1 = 1 \\ k_4 = 3.1 + 1 = 4 \\ k_{13} = 3.4 + 1 = 13 \end{array} \right.$$

Generalizando, chegamos a fórmula:

$$k_n = 3.k_{n-1} + 1$$

Tabela 6: Curva de Peano.

	Nível	Nº segm	Comp segm	Comp. curva	Área	Nº linhas (degraus) $k_n$	Termo geral $a_k$	Soma quadrados $S_k$	Nº total quadrados nos dois semiplanos	Área total
	0	1	$l$	$l$	-	-	-	-	-	-
	1	9	$\frac{l}{3}$	$\frac{9}{3}l = 3l$	$\left(\frac{l}{3}\right)^2$	$k_1=1$	$a_1=1$	$S_1=1$	2	$2\left(\frac{l}{3}\right)^2$
	2	$9^2$	$\frac{l}{3^2}$	$\frac{9^2}{3^2}l = 3^2l$	$\left(\frac{l}{3^2}\right)^2$	$K_4=4$	$a_4=7$	$S_4=4^2$	$2.4^2=32$	$32\left(\frac{l}{3^2}\right)^2$
	3	$9^3$	$\frac{l}{3^3}$	$\frac{9^3}{3^3}l = 3^3l$	$\left(\frac{l}{3^3}\right)^2$	$k_{13}=13$	$a_{13}=25$	$S_{13}=13^2$	$2.13^2=338$	$338\left(\frac{l}{3^3}\right)^2$
	4	$9^4$	$\frac{l}{3^4}$	$\frac{9^4}{3^4}l = 3^4l$	$\left(\frac{l}{3^4}\right)^2$	$k_{40}=40$	$a_{40}=79$	$S_{40}=40^2$	$2.40^2=1600$	$3200\left(\frac{l}{3^4}\right)^2$
	$n$	$9^n$	$\frac{l}{3^n}$	$3^n l$	$\frac{l^2}{9^n}$	$k_n = 3k_{n-1} + 1$	$a_k = a_1 + (3k_{n-1})2$	$S_k = k_n^2$	$2.k_n^2$ onde $k_n = 3k_{n-1} + 1$	$\frac{l^2}{9^n} . k_n^2$

O  $k_n$  é o triplo do  $k$  anterior mais um. Explica-se: como cada linha foi dividida em três partes iguais, temos que cada  $k_n$  corresponde ao  $k$  anterior multiplicado por três e acrescido de um, sendo que este um, é a linha (ou o quadrado) que surge nas duas extremidades dos semiplanos.

O termo geral  $a_k$  por sua vez, corresponde ao número de quadrados formados em cada linha. Apesar de apresentarmos como PA, apenas o número de quadrados formados nas linhas fronteiras aos dois semiplanos, ele pode ser calculado em qualquer linha de todos os níveis da curva.

Veja que nos primeiros níveis, não há necessidade do uso de fórmula para calcularmos o  $a_k$ , podemos simplesmente contar os quadrados, mas em níveis mais avançados, a visualização e a contagem tornam-se impraticáveis, característica presente em todos os fractais.

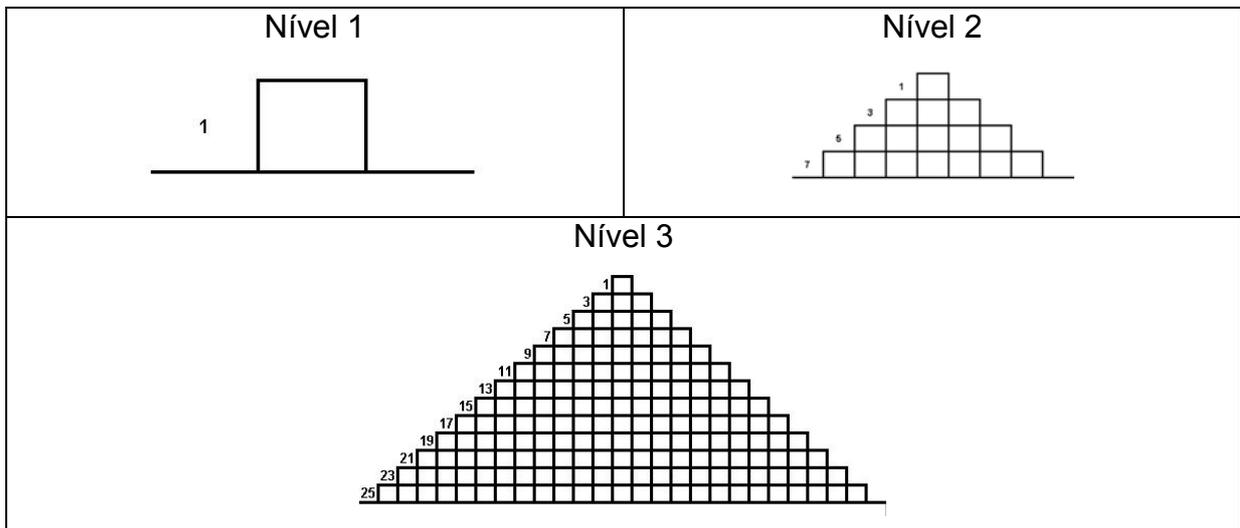


Figura 12: Termo geral e soma de quadrados.

O termo geral  $a_k$  é encontrado pela fórmula do termo geral da PA, (1.1), vista na seção 1.2:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

onde:  $a_1 = 1$        $r = 2$

$$\text{Dados extraídos da tabela} \left\{ \begin{array}{l} a_4 = 1 + (4 - 1)2 = 7 \\ a_{13} = 1 + (13 - 1)2 = 25 \\ a_{40} = 1 + (40 - 1)2 = 79 \\ a_k = a_1 + (k_n - 1)2 \end{array} \right.$$

Seja  $k_n = 3.k_{n-1} + 1$ , temos então, a fórmula do termo geral:

$$a_k = a_1 + (3 \cdot k_{n-1} + 1 - 1)2$$

$$a_k = a_1 + (3 \cdot k_{n-1})2$$

A soma do número total de quadrados  $S_k$  de cada nível, também pode ser contada apenas observando a curva, mas da mesma forma que o  $a_k$ , torna-se impraticável em níveis mais avançados, por isso é necessário o uso de fórmula.

O número total de quadrados de cada nível é encontrado pela fórmula da soma de PA, (1.4), vista na seção 1.2.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

onde:  $a_1 = 1$

$$S_1 = a_1 = 1$$

$$\text{Dados extraídos da tabela} \left\{ \begin{array}{l} S_4 = \frac{(1+7)4}{2} = 16 = 4^2 \\ S_{13} = \frac{(1+25)13}{2} = 169 = 13^2 \\ S_{40} = \frac{(1+79)40}{2} = 1600 = 40^2 \end{array} \right.$$

Generalizando:

$$S_k = \frac{(a_1 + a_k)k_n}{2}$$

Substituindo  $a_k$ , temos:

$$S_k = \frac{(a_1 + (a_1 + (3k_{n-1})2))k_n}{2}$$

$$S_k = \frac{2(a_1 + 3k_{n-1})k_n}{2}$$

$$S_k = (a_1 + 3k_{n-1})k_n$$

Mas  $a_1 = 1$ , então:

$$S_k = (1 + 3k_{n-1})k_n$$

Como  $k_n = 3k_{n-1} + 1$ , assim

$$S_k = k_n \cdot k_n$$

$$S_k = k_n^2$$

Uma observação interessante nesta soma é que ela resulta em uma potência, e é um dos motivos que torna a Curva de Peano tão especial, pois podemos visualizar esta magia dos números ao desenvolvermos o algoritmo.

A título de curiosidade, vamos calcular alguns valores de uma PA tomando como exemplo a Curva de Peano no nível 3.

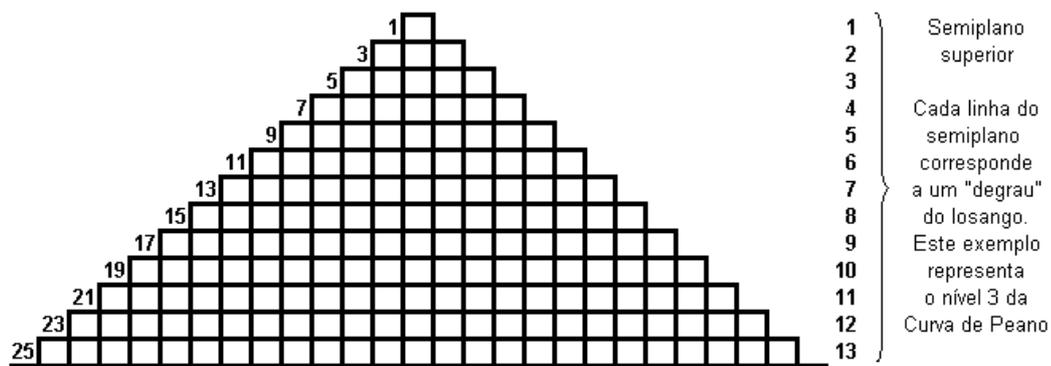


Figura 13: Curva de Peano nível 3.

Considere que em cada linha do semiplano (tanto no superior quanto no inferior), encontramos o nível "n" e o  $a_n$  correspondente.

Com a curva podemos encontrar a PA de razão  $r = 2$  e  $a_1 = 1$  em todos os seus 13 "degraus". Por exemplo:

Para  $n = 10$  teremos

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_{10} = 1 + (10 - 1)2$$

$$a_{10} = 19$$

Para  $n = 6$

$$a_6 = 1 + (6 - 1)2$$

$$a_6 = 11$$

Não é fantástico ! Como não motivar os alunos com um exemplo tão "visual" quanto este ?

### 3 CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS UTILIZANDO O CABRI-GÈOMÈTRE

O Cabri-Gèomètre II, idealizado por Baulac, Bellemain & Laborde (1994) se dispõe a realizar construções clássicas da geometria tradicional. A palavra “cabri” é a abreviação da expressão francesa para *Cahier de Brouillon Interactif*, ou Caderno de Rascunho Interativo, nome que define bem seus objetos fundamentais.

O Cabri-Gèomètre II é um ambiente essencialmente interativo, e baseia-se na manipulação direta dos objetos, não dispondo de um texto ou rotina que defina as ações realizadas. Mesmo com a utilização das macro-construções, que em termos práticos viabiliza a construção de fractais, não diminui muito o esforço a ser despendido devido aos processos iterativos com repetições sucessivas de construções geométricas complexas. Apesar de não possuir uma ferramenta para uso da recursividade, resultando em uma construção longa e braçal, esta característica torna-se interessante uma vez que o usuário acaba sendo obrigado a derramar mais “suor” para a sua construção, para tanto requer uma maior atenção e dedicação na construção de fractais. Neste sentido acabam apresentando-se de forma mais explícita e transparente, se comparado com as construções pré-programadas dos outros ambientes.

Para uma utilização satisfatória do Cabri-Gèomètre, é necessário um mínimo de entendimento de suas ferramentas bem como um conhecimento básico de geometria.

O conteúdo acima foi parcialmente extraído de [3].

#### 3.1 Construção da Curva de Koch

Para o cabri tornar-se uma ferramenta que realmente valha a pena ser utilizada para auxiliar na construção de fractais, devemos obter macro-construções que viabilizem o processo. Do contrário, o trabalho torna-se exaustivo e o tempo despendido foge à nossa realidade escolar, além de tornar-se pouco atrativo.

Iniciamos a macro-construção da curva de Koch com um ponto e geramos o seu simétrico com a ferramenta simetria central. Repetimos este passo para o ponto simétrico gerado, e em seguida, com a ferramenta segmento, unimos os pontos das extremidades com os pontos centrais, como mostra a figura 14:

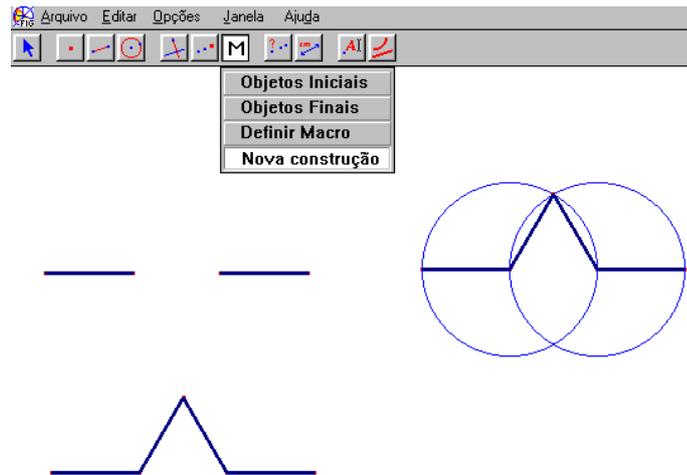


Figura 14: Macro-construção da curva de Koch.

Construímos duas circunferências com os centros partindo de cada ponto interior dos segmentos. Inserimos um ponto na interseção superior das circunferências e um segmento unindo cada um dos segmentos da base, com a interseção das circunferências. Usamos a ferramenta esconder-mostrar nas duas circunferências e a seguir, escolhemos nossos objetos iniciais e finais: um dos segmentos como inicial e os outros três como objetos finais e definimos a macro-construção.

Podemos construir outros níveis da curva de Koch utilizando esta macro apenas dividindo o segmento do próximo nível em três partes iguais.

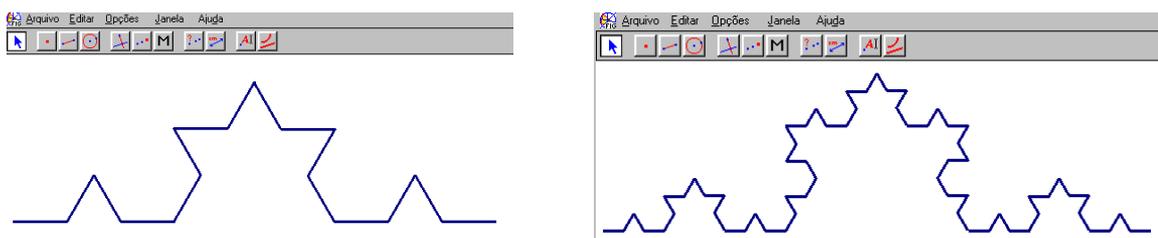


Figura 15: Curva de Koch níveis 2 e 3.

### 3.2 Construção do Triângulo de Sierpinski

Das diversas formas de construção do triângulo de Sierpinski, iremos apresentar uma extremamente simples e de fácil compreensão, descrita a seguir.

Para iniciarmos a macro-construção, utilizamos a ferramenta circunferência, construindo duas circunferências intersectadas. Inserimos um ponto na interseção superior das mesmas e em seguida construímos um triângulo com a ferramenta

própria. Unimos os pontos centrais da circunferência com o ponto de interseção, os quais formarão os seus vértices.

Em cada um dos lados do triângulo inserimos um ponto médio, e sobre estes, um novo triângulo invertido, que é o triângulo central. Colorimos ambos os triângulos com cores diferentes e, com a ferramenta esconder-mostrar, escondemos as circunferências.

A macro será definida escolhendo o triângulo externo como objeto inicial e o interno como objeto final. A figura 16 mostra detalhadamente os passos descritos:

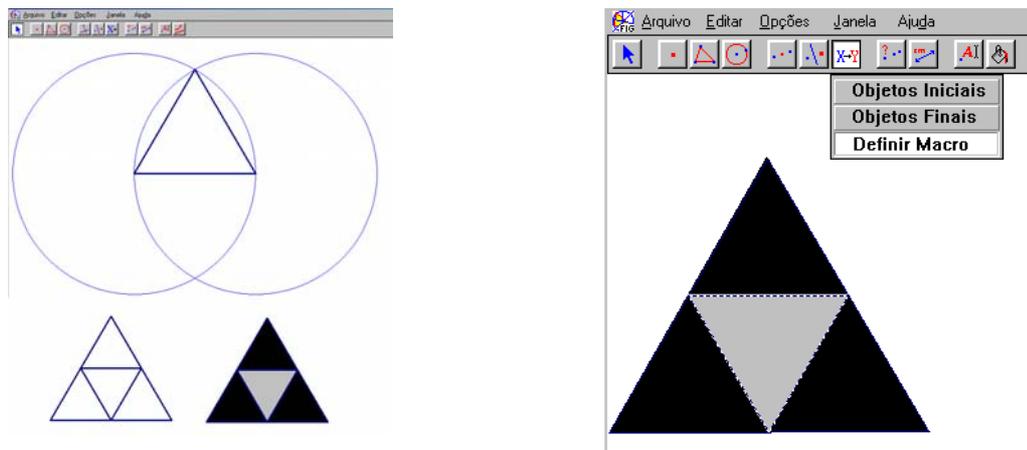


Figura 16: Macro-construção do triângulo de Sierpinski.

Após definida a macro, para cada nível posterior, inserimos um triângulo dentro de cada triângulo externo e nestes utilizamos a macro-construção.

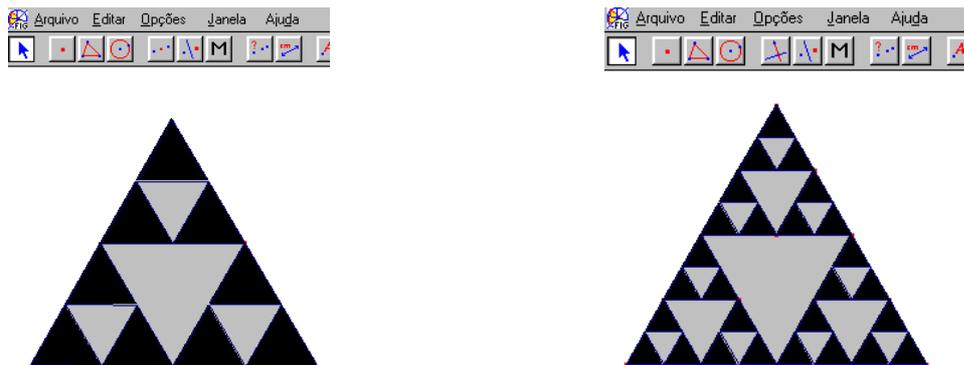


Figura 17: Triângulo de Sierpinski níveis 2 e 3.

### 3.3 Construção da malha triangulada

A malha triangulada é encontrada no livro do professor, em livros didáticos do ensino fundamental. Ela constitui um acessório muito útil para a construção do fractal “árvore bifurcada” apresentada na seção 2.5, árvores bifurcadas.

Mostraremos uma construção relativamente elaborada, e veremos alguns passos utilizados. Cabe aqui esclarecer que o leitor poderá construí-la de outra maneira, caso lhe convier.

A partir de um quadrado exterior, traçamos uma reta paralela aos seus lados e centralizada na posição vertical da figura. Marcamos o ponto médio dessa reta e nele construímos uma figura hexagonal de tamanho variável. Quanto menor for esta figura hexagonal, mais fina será a malha.

Em ambos os lados do hexágono, paralelos à reta, encontramos os pontos médios. A partir destes pontos médios, inserimos pontos simétricos em ambas as direções e nestes, traçamos retas paralelas a reta central. Traçamos a seguir retas paralelas aos outros lados do hexágono até preencher todo o quadrado.

A malha triangulada pode ser utilizada no próprio cabri ou ser impressa para utilização em sala de aula como atividade prática.

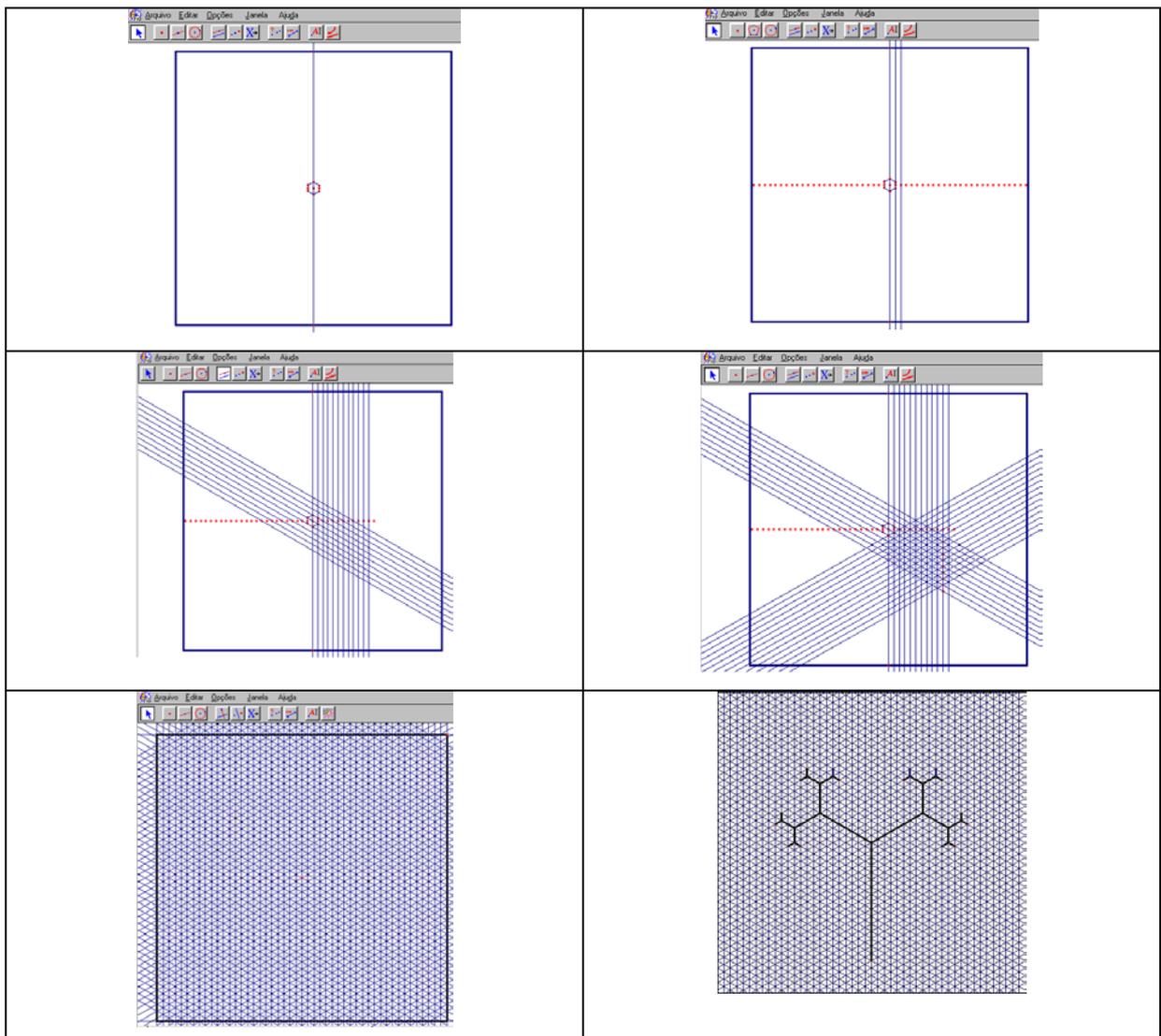


Figura 18: Construção da malha triangulada no Cabri.

### 3.4 Construção do fractal Circuntexto

O fractal circuntexto não é encontrado neste trabalho, de forma que, se o leitor sentir-se motivado a obter maiores detalhes, poderá estudá-lo em [2].

Construiremos este fractal a título de curiosidade, para mostrar que podemos encontrar progressões também em fractais circulares. Além disso, a sua beleza constitui um grande estímulo para a utilização do Cabri-Gèomètre.

Este fractal é construído a partir de uma circunferência inicial, assim sendo, a primeira ferramenta utilizada no cabri, é a circunferência. Nela introduzimos um segmento de tamanho pré-definido, que é o raio propriamente dito ( $R_0$ )

O próximo passo é calcular através do raio inicial ( $R_0$ ), dado, o raio do próximo nível. Calculamos através da relação  $\frac{r}{s} = k = 0.4641016$ . Teremos então que, as circunferências no nível 1 a serem inscritas, têm por medida de raio:  $r = 0,4641016 \times 6 = 2,78 \text{ cm}$ .

No cabri-gèomètre, inserimos um segmento sobre o raio anterior com esta medida e construímos através de um polígono regular, um triângulo equilátero. O centro do triângulo coincide com o centro da circunferência maior, e a distância do vértice superior até a circunferência inicial é o raio das circunferências do próximo nível.

Construímos então, as três circunferências com o centro nos vértices do triângulo equilátero. As circunferências são tangentes internamente à circunferência maior e tangentes entre si.

Para definirmos a macro-construção, usamos como objetos iniciais a circunferência exterior juntamente com o raio do próximo nível, e como objetos finais as outras três circunferências interiores.

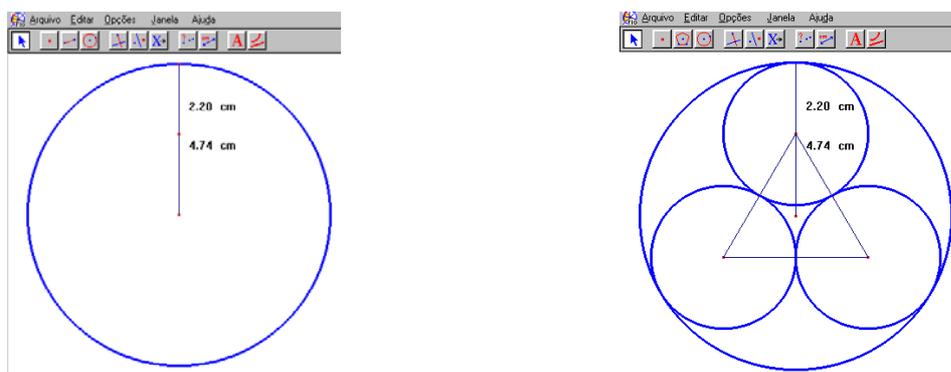


Figura 19: Macro-construção do circuntexto.

Continua...

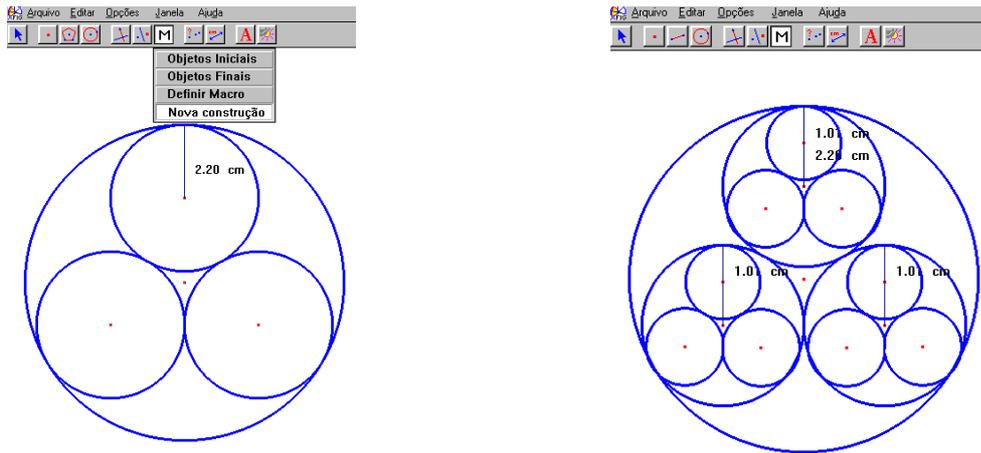


Figura 19: Macro-construção do circuntexto.(...continuação)

Em cada nível seguinte basta inserirmos a macro clicando simultaneamente no novo raio e na circunferência imediatamente exterior.

A figura 21 mostra o fractal circuntexto no nível 4.

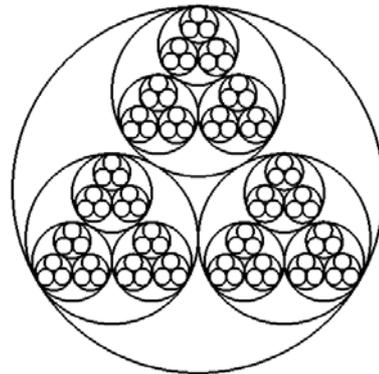


Figura 20: Fractal circuntexto nível 4.

## 4 CONCLUSÃO

Iniciamos este trabalho com o objetivo de motivar as aulas de progressões geométricas e algébricas, tornando-as mais dinâmicas e atrativas, entremeando a geometria fractal com a álgebra numa brincadeira prática e agradável.

Esperamos que nossos objetivos tenham sido alcançados, mostrando que é possível motivar o uso da PA e PG aliando seus conceitos algébricos com o estudo da geometria fractal.

Desejamos a todos aqueles que se aventurarem pelo mundo das progressões motivadas pelos fractais, que possam encontrar aqui uma fonte de inspiração para seus estudos, ampliando e divulgando cada vez mais o uso dos fractais em sala de aula. E, esperamos também, estar contribuindo com uma pequena parcela a todos aqueles que tiverem a curiosidade de conhecer um pouco mais sobre este tema particularmente especial.

## REFERÊNCIAS

- [1]. BARBOSA, R. M. **Descobrimo a Geometria Fractal** – Para a sala de aula. 2ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- [2]. BIANCO, K. **Fractais geométricos – Características, construção e Implementação**. Monografia do curso de especialização para professores de Matemática. UFPR, Curitiba, a ser apresentada em 20/10/2007.
- [3]. EBERSON, R.R. **Um estudo sobre a construção de fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano**. Tese de mestrado em educação Matemática. São Paulo, 2004.
- [4]. GIOVANNI, J.R., et al. **Matemática fundamental, 2º Grau** – vol. único. São Paulo: FTD, 1994.
- [5]. GOMES, A. **Motivação do estudo de áreas e perímetros de figuras geométricas através de fractais**. Monografia do curso de especialização para professores de Matemática. UFPR, Curitiba, a ser apresentada em 20/10/2007.
- [6]. IEZZI, G. et al. **Tópicos de Matemática** – vol. 2, 2ª ed. São Paulo: Atual, 1981.
- [7]. LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio** – Vol. 1, Ed.9ª, Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [8]. MURR, C. et al. **Fractais: Propriedades e construção**. Prodocência, UFPR, 2007.
- [9]. OLIVEIRA, A.M. & SILVA, A. **Biblioteca da matemática moderna** Tomo IV. São Paulo: Lisa, 1968.
- [10]. SERRA, C. P. **O fractal circuntexto e sua geometria**. REVISTA ACADÊMICA – Pontifícia Universidade Católica – Ano II Número 3, Ed. Universitária Champagnat, Março 1991 pg 35
- [11]. SERRA, C. P. e KARAS, E. W. **Fractais gerados por sistemas dinâmicos complexos**. Ed. Champagnat, Curitiba, 1997.
- [12]. SIGNORELLI, C.F. **Matemática 2º grau** – vol. 2. São Paulo: Ed. Ática SA, 1992.
- [13]. ZAVALLA, A. B. P. **Motivação do estudo de funções exponenciais e logarítmicas através da geometria fractal**. Monografia do curso de especialização para professores de Matemática. UFPR, Curitiba, a ser apresentada em 20/10/2007.
- [14]. <http://www.e-escola.pt/site/personalidade.asp?per=54> Acessado em 11/05/2007.
- [15]. <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/sequenc/sequenc.htm> Acessado em 06/01/2007.
- [16]. <http://sوماتematica.com.br/geometria.php> Acessado em 19/01/2007.