DIMENSÃO ESPACIAL

Karla C. Arsie
Orientadores: Drª. Elizabeth Wegner Karas e
Dr. Ademir Alves Ribeiro

Este trabalho foi realizado com o apoio do PET-Matemática-UFPR

Neste trabalho discutiremos o conceito de dimensão espacial que está relacionado com o espaço que uma figura ocupa. Para figuras convencionais este conceito se confunde com o conceito usual de dimensão topológica. No entanto, existem outras figuras, ditas fractais para as quais a dimensão espacial é estritamente maior que a dimensão topológica. Exemplificaremos isto através do conjunto de Cantor que é um fractal.

1 CONCEITO DE FRACTAL

"Haverá alguma razão para a geometria não descrever o formato das nuvens, das montanhas, das árvores, ou dos rios?"
(B.Mandelbrot)

Fractal é uma figura com propriedades e características peculiares que os diferenciam das figuras geométricas habituais. Estão ao nosso redor no formato de nuvens, ramificações de árvores, nas linhas costeiras, de um modo geral nas formas da natureza. O conceito de fractal nos ajuda a revelar uma regularidade em fenômenos físicos e biológicos, que antigamente eram descartados como "aleatórios", "monstros"ou "caóticos". Suas principais características[1] são:

- Estrutura fina - O grau de detalhamento de um fractal não diminui se examinarmos uma porção arbitrariamente pequena do mesmo. O fractal possui detalhes em partes tão pequenas como possamos imaginar.

e-mail:linha.ro@gmail.com
e-mail:karas@mat.ufpr.br, ademir@mat.ufpr.br
[1]Vide [7]

- Auto-Similaridade - Se tomarmos uma porção do fractal, esta irá se assemelhar a uma porção maior, ou ao fractal inteiro. Alguns fractais apresentam a auto-similaridade estrita, ou seja, uma porção do fractal reproduz exatamente a forma de uma porção maior.

- Simplicidade na lei de formação - Apesar do grau de detalhamento e a complexidade da estrutura de um fractal não impede, em geral, que eles sejam formados por processos relativamente simples e diretos. O processo de construção é frequentemente iterativo (isto é, repetitivo) e sua construção se baseia em algoritmos simples.

2 CONJUNTO DE CANTOR

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, matemático que dedicou a maior parte de seus estudos ao que atualmente conhecemos como teoria dos conjuntos, amplamente difundida e aplicada até hoje legou-nos uma figura denominada *Conjunto de Cantor* também conhecido como *Poeira de Cantor*. A lei de formação do conjunto de Cantor é muito simples[2]:
Tomamos o intervalo $[0,1]$, dividimos esse intervalo em três partes iguais. Em seguida removemos a parte central, ou seja o intervalo $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, restando $\left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$. Repetimos o processo a cada um dos segmentos, removendo-lhes o terço médio, e assim sussesivamente (Fig. 1). O processo é repetido fazendo-se o número de etapas k tender ao infinito. O conjunto K dos pontos que não foram retirados é o conjunto de Cantor.

Proposição 2.1 *Na etapa k da construção do conjunto de Cantor K o número de segmentos é 2^k e o comprimento de cada um deles é $\left(\frac{1}{3}\right)^k$.*

Prova. Prova por indução. Sejam n_k o número de segmentos e l_k o comprimento de cada segmento na etapa k.
Na etapa $k=0$ temos $n_0 = 2^0 = 1$. De fato, ao iniciarmos a construção, o número de segmentos que tomamos é igual a 1. Considere $k>0$ arbitrário e supomos que a proposição seja válida para k, ou seja, $n_k = 2^k$. Devemos mostrar que $n_{k+1} = 2^{k+1}$.
Temos que $n_{k+1} = 2.n^k$, pois a cada etapa o número de intervalos é dobrado.
Usando a hipótese de indução temos:

$$n_{k+1} = 2n_k = 2 \times 2^k = 2^{k+1}.$$

Para provar a afirmação referente ao comprimento dos segmentos note que, por construção, $\ell_0 = 1$. Suponha por indução que $\ell_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k$. Como a cada etapa o

[2]Vide [4, 5, 7]

comprimento de cada segmento é reduzido em $\frac{1}{3}$, temos que:

$$\ell_{k+1} = \frac{1}{3}\ell_k = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1},$$

completando a demonstração. □

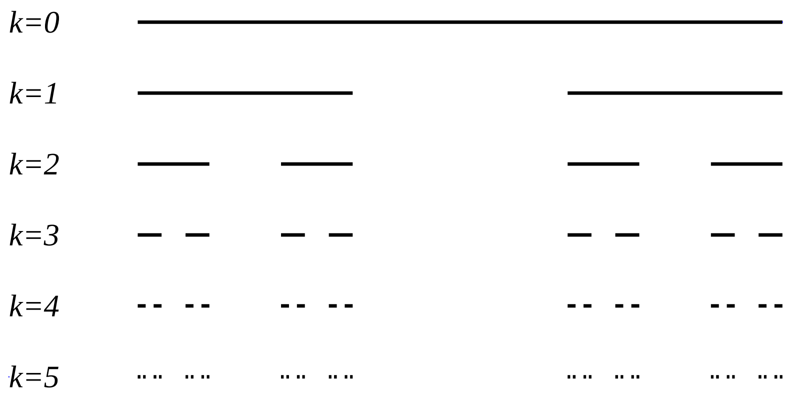

Figura 1: Etapas de construção do conjunto de Cantor.

O conjunto de Cantor é obtido fazendo-se o número de etapas $k \to \infty$, logo

$$\lim_{k\to\infty} n_k = \lim_{k\to\infty} 2^k = \infty$$

e

$$\lim_{k\to\infty} \ell_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 0$$

o que significa que o conjunto de Cantor é uma série de pontos pulverizados, daí a denominação *Poeira de Cantor*.

Formalmente, o conjunto de Cantor é um subconjunto fechado de intervalos $[0, 1] \subset R$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos. Com as seguintes propriedades[3]:

- É compacto
- Tem interior vazio
- Não contém pontos isolados
- É não-enumerável

[3]Vide [3, 5]

3 DIMENSÃO ESPACIAL

Dizemos, normalmente, que um ponto, uma reta, um plano, tem dimensão topológica respectivamente, 0, 1 e 2. Para determinarmos a dimensão topológica de um objeto, recorre-se ao estabelecimento de uma correspondência unívoca desse objeto com um desses entes geométricos fundamentais. Começamos esclarecendo que ao falarmos em dimensão espacial, não estamos nos referindo a dimensão topológica, a qual não depende da forma, nem do tamanho da figura. O conceito de dimensão espacial, ou dimensão fractal, está relacionado com o espaço que a figura ocupa. Para as figuras geométricas convencionais estes dois conceitos se confundem. No entanto, existem figuras para as quais a dimensão espacial, pode ser fracionária ou inteira, é sempre estritamente maior que a dimensão topológica. Estas figuras são chamadas de fractais.
A dimensão espacial pode ser calculada, entre outras maneiras, através de dois métodos:

- Dimensão por auto-similaridade
- Dimensão por contagem de caixas

A seguir apresentaremos esses dois métodos e também a Dimensão de Hausdorff, que vem formalizar todo esse conceito de dimensão espacial e calcularemos a dimensão do conjunto de Cantor de acordo com cada um deles.

3.1 Dimensão por Auto-similaridade

Quando um objeto apresenta auto-similaridade estrita, ou seja, a estrutura do objeto se repete em escalas sucessivas umas dentro das outras, sua dimensão pode ser determinada por um método bem simples. Para chegar neste método, vamos analisar alguns objetos para os quais conhecemos sua dimensão D. Vamos dividir o objeto em N partes reduzidas de um fator R.

- Segmento
  Vamos tomar um segmento de reta em seu estado inicial teremos $N = 1$, $R = 1$ e sabemos que a dimensão é $D = 1$. Agora dividimos em duas partes iguais, obtendo $N = 2$, $R = \frac{1}{2}$. Em três partes iguais obtemos $N = 3$, $R = \frac{1}{3}$, e assim sucessivamente.
  Note que podemos relacionar N, R e D da seguinte forma:

$$N = \left(\frac{1}{R}\right)^D.$$

- Quadrado
  Tomamos um quadrado, em seu estado inicial teremos $N = 1$, $R = 1$ e sabemos que a dimensão é $D = 2$. Agora dividimos seus lados em 2 partes iguais e teremos $N = 4$, $R = \frac{1}{2}$; em três teremos $N = 9$, $R = \frac{1}{3}$, e assim sucessivamente. Note que temos a mesma relação:

$$N = \left(\frac{1}{R}\right)^D.$$

- Cubo
  Tomamos um cubo, em seu estado inicial teremos $N = 1$, $R = 1$ e sabemos que a dimensão é $D = 3$. Agora dividimos seus lados em 2 partes iguais e teremos $N = 8$, $R = \frac{1}{2}$; em três teremos $N = 27$, $R = \frac{1}{3}$, e assim sucessivamente. Note que a mesma relação continua valendo:

$$N = \left(\frac{1}{R}\right)^D.$$

Como o conceito de dimensão espacial é uma extensão ao conceito de dimensão topológica, se a figura possuir auto-similaridade, sua dimensão é determinada pela relação:

$$D = \frac{logN}{log\frac{1}{R}}. \tag{1}$$

Cálculo da dimensão do conjunto de Cantor

Basta analisarmos o que ocorre da passagem de uma dada etapa para outra. Notamos que a cada etapa no lugar de um segmento ficamos com 2, assim $N = 2$, e esse novo segmento é obtido reduzindo o segmento anterior a um fator de $\frac{1}{3}$, assim $R = \frac{1}{3}$. Substituindo na relação acima temos:

$$D = \frac{log2}{log3} \approx 0.63,$$

o que significa que o conjunto de Cantor ocupa mais espaço que um ponto e menos espaço do que um segmento de reta. No entanto o conjunto de Cantor tem dimensão topológica 0, pois consiste de uma infinidade de pontos pulverizados. Note que a dimensão espacial, que acabamos de calcular, é maior que a dimensão topológica.

3.2 Dimensão por Contagem de Caixas

Quando um fractal não apresenta auto-similaridade, não há como calcular sua dimensão espacial pelo método acima, devido às irregulariedades que o fractal comumente apresenta. Uma alternativa para a obtenção de uma estimava da dimensão espacial é o método por contagem de caixas que consiste em cobrir a figura com uma malha de quadrículas de lado ℓ, e contar quantas possuem ao menos um ponto da figura. Representamos esse valor por N. Seja δ o lado da moldura que escolhemos para inserir a figura.
Consideremos um quadrado cheio de lado δ. Se dividirmos em quatro quadrículas iguais de lado ℓ, cada uma delas terá a metade do lado do quadrado inicial. E obtemos $N = 4$ e $\frac{\delta}{\ell} = 2$. Como a dimensão do quadrado é $D = 2$ temos a relação: $N = \left(\frac{\delta}{\ell}\right)^D$.
Tomemos outro exemplo, um cubo de aresta δ, dividimos este cubo em 8 cubos menores de aresta ℓ igual à metade da aresta do cubo original. Para esse caso teremos $N = 8$ e $\frac{\delta}{\ell} = 2$ e $D = 3$, podemos escrever $8 = 2^3$, e assim vale a mesma relação $N = \left(\frac{\delta}{\ell}\right)^D$.
Como parece estar consistente podemos estabelecer a igualdade e isolando D teremos:

$$D = \frac{logN}{log\frac{\delta}{\ell}}.$$

Mas para que a determinação de D seja precisa, é necessário que a malha seja muito fina, isto é, que o lado ℓ das quadrículas seja tão pequeno quanto se queira. Podemos definir D aplicando o limite quando o lado tente a zero:

$$D = \lim_{\ell \to 0} \frac{logN}{log\frac{\delta}{\ell}}.$$

Cálculo da dimensão do conjunto de Cantor

Em uma dada etapa k da construção do conjunto de Cantor, podemos cobri-lo com $N = 2^k$ quadrículas (números de intervalos) de lado $\ell = \frac{1}{3^k}$ (comprimento do intervalo na etapa k). Por iniciarmos a construção com intervalo $[0, 1]$, temos $\delta = 1$. Note que neste caso fazer $\ell \to 0$ é equivalente a $k \to \infty$. Então

$$D = \lim_{k \to \infty} \frac{log2^k}{log3^k} = \frac{log2}{log3} \approx 0.63,$$

que coincide com a dimensão calculada pela fórmula (1).

Implementação computacional

O método descrito é adequado para uso no computador, empregando-se elementos finitos no lugar das quadrículas infinitamente pequenas, desde que se tome ℓ com um valor suficientemente pequeno e que se possa detectar quando uma quadrícula contém pelo menos um ponto do fractal. Vejamos como isso pode ser feito de acordo com a igualdade estabelecida anteriormente:

$$D = \frac{logN}{log\frac{\delta}{\ell}}.$$

Multiplicando por $log\frac{\delta}{\ell}$ nos dois lado da igualdade obtemos: $logN = Dlog\frac{\delta}{\ell}$.
Podemos relacionar essa igualdade com a equação de uma reta e um gráfico com o eixo horizontal $log\frac{\delta}{\ell}$ e eixo vertical $logN$, e assim D seria o coeficiente angular da nossa reta.
Podemos tornar o método mais preciso, construindo sucessivamente m grades que cobrem a figura, cada grade composta de caixas de lado ℓ_i, sendo N_i o número de caixas da i-ésima grade que contém pelo menos um ponto da figura ($i = 1, 2, 3, ..., m$).
Neste gráfico colocamos os m pontos de coordenadas $\left(log\frac{\delta}{\ell_i}, logN_i\right)$.
A reta $alog\frac{\delta}{l} + b$ que mais se ajusta a esse conjunto de pontos pelo método dos mínimos quadrados tem por parâmetros:

$$a = \frac{m\rho - \alpha\beta}{m\kappa - \alpha^2},$$

$$b = \frac{\beta\kappa - \alpha\rho}{m\kappa - \alpha^2},$$

com $\alpha = \sum_{i=1}^{m} log\ell_i,\qquad \beta = \sum_{i=1}^{m} logN_i,$

e $\kappa = \sum_{i=1}^{m} \left(log\ell_i\right)^2,\qquad \rho = \sum_{i=1}^{m} log\ell_i logN_i.$

O coeficiente angular a da reta nos dá uma estimativa da dimensão procurada.

3.3 Dimensão de Hausdorff

Para chegarmos à Dimensão de Hausdorff é necessário abordar um conceito de medida. Medida intuitivamente é uma maneira de se atribuir um tamanho a um conjunto, representando essa característica por um número.

Definição 3.1 *Considere $F \subset I\!R^n$. Diâmetro de F é o supremo das distâncias entre dois de seus pontos e denotamos por $|F|$. Ou seja,*

$$|F| = sup\{\|x - y\|, x, y \in F\}.$$

Definição 3.2 *Uma δ-cobertura para um conjunto $F \subset I\!R^n$ é uma coleção enumerável de conjuntos $\{X_i\}$ com diâmetro máximo δ que cobre F, ou seja:*

$$\{X_i \mid F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \quad e \quad 0 < |X_i| \leq \delta\}.$$

Existem infinitas coleções que satisfazem as exigências acima.

Definição 3.3 *Considere $F \subset I\!R^n$ e $s \geq 0$. Dado $\delta > 0$ definimos*

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |X_i|^s \ \mid \ \{X_i\} \text{ é } \delta\text{-cobertura para } F\right\}.$$

Queremos coleções que cobrem F, porém restritas a valores cada vez menores de δ. Fazendo $\delta \to 0$, temos a medida de Hausdorff s-dimensional

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F).$$

Enunciaremos algumas propriedades relacionadas com a medida de Hausdorff[4].

Proposição 3.4 *Considere F_i uma coleção enumerável de conjuntos abertos ou fechados[5] disjuntos. Então*

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i).$$

Prova. O resultado segue da definição de medida[6]. □

Proposição 3.5 *Se $F \subset I\!R^n$ e $\lambda > 0$, então*

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F)$$

onde $\lambda F = \{\lambda x \mid x \in F\}$.

---

[4]Vide [1]

[5]A Proposição 2 vale numa situação mais geral em que F_i é uma coleção enumerável de conjuntos de *Borel* disjuntos. Conjuntos obtidos pela interseção ou união enumerável de conjuntos abertos ou fechados são conjuntos de Borel. Mais detalhes vide [2].

[6][6, pág 253]

Prova. Toda δ-cobertura de λF pode ser escrita como $\{\lambda X_i\}$, onde X_i é uma $\frac{\delta}{\lambda}$-cobertura de F. Pela definição de medida de Hausdorff temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(\lambda F) &= \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta(\lambda F)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\left(\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda X_i|^s\right\}\right)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\left(\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^s|X_i|^s\right\}\right)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\lambda^s\left(\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|X_i|^s\right\}\right)\\ &= \lambda^s\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_{\frac{\delta}{\lambda}}(F)\\ &= \lambda^s\lim_{\gamma\to 0}\mathcal{H}^s_\gamma(F),\end{aligned}$$

onde $\gamma = \frac{\delta}{\lambda}$. Portanto,

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s\mathcal{H}^s(F),$$

completando a demonstração. □

Proposição 3.6 *Se $F \subset I\!R^n$ e $v \in I\!R^n$, então*

$$\mathcal{H}^s(F+v) = \mathcal{H}^s(F),$$

onde $F+v = \{x+v \mid x \in F\}$.

Prova. O resultado segue diretamente dos seguintes fatos:
i)Toda $\delta-$ *cobertura* de $F+v$ pode ser escrita como $\{X_i+v\}$ onde X_i é uma δ-cobertura de F.
ii)$|X_i+v| = |X_i|$. □

Note que a medida de Hausdorff depende do parâmetro s. Variando s, há um valor crítico do qual a medida salta de infinito para zero, conforme o teorema abaixo:

Teorema 3.7 *Considere $F \subset I\!R^n$ e $s_0 \geq 0$. Se $\mathcal{H}^{s_0}(F) < \infty$, então $\mathcal{H}^s(F) = 0$ para todo $s > s_0$. Por outro lado, se $\mathcal{H}^{s_0}(F) > 0$, então $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ para todo $s < s_0$.*

Prova. Temos $\mathcal{H}^{s_0}(F) = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^{s_0}_\delta(F)$. Como $\mathcal{H}^{s_0}(F) < \infty$, para $\epsilon = 1$ existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < \delta < \delta_1$ então $\mathcal{H}^{s_0}_\delta(F) < \mathcal{H}^{s_0}(F) + 1$. Pela Definição 3.3 existe $\{X_i\}$ com $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ e $|X_i| \leq \delta$, tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty}|X_i|^{s_0} < \mathcal{H}^{s_0}(F) + 1. \qquad (2)$$

Dado $s > s_0$, temos $|X_i|^{s-s_0} \leq \delta^{s-s_0}$. Portanto, usando a Definição 3.3, a desigualdade anterior e (2) obtemos,

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |X_i|^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{s-s_0}|X_i|^{s_0} < \delta^{s-s_0}\left(\mathcal{H}^{s_0}(F) + 1\right).$$

Passando o limite quando $\delta \to 0$, obtemos

$$\mathcal{H}^s(F) \leq 0.$$

Logo $\mathcal{H}^s(F) = 0$, para $s > s_0$.
Suponha agora que $\mathcal{H}^{s_0}(F) > 0$. Tome $s < s_0$ arbitrário. Queremos provar que $\mathcal{H}^s(F) = \infty$. Vamos supor por contradição que $\mathcal{H}^s(F) < \infty$. Pelo que provamos acima, para $s_0 > s$ temos $\mathcal{H}^{s_0}(F) = 0$, o que contradiz nossa hipótese.
Logo $\mathcal{H}^s(F) = \infty$, para $s < s_0$, completando a demonstração. $\square$

De acordo com o teorema anterior temos que os conjuntos $S_1 = \{s \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\}$ e $S_2 = \{s \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$ são intervalos disjuntos e que o conjunto $\{s \mid 0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty\}$ tem no máximo um ponto. Portanto,

$$\inf\{s \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\},$$

e este valor crítico de s é chamado de Dimensão de Hausdorff de F e denotado por $\mathbf{D_h(F)}$. Assim,

$$\mathbf{D_h(F)} = \inf\{\mathbf{s} \mid \mathcal{H}^{\mathbf{s}}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}\} = \sup\{\mathbf{s} \mid \mathcal{H}^{\mathbf{s}}(\mathbf{F}) = \infty\}.$$

Então,

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & \text{se } \ s < D_h(F) \\ 0, & \text{se } \ s > D_h(F) \end{cases}$$

Se $s = D_h(F)$, então $\mathcal{H}^s(F)$ pode ser zero ou infinito, ou pode satisfazer

$$0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty,$$

como ilustado na Figura 2.

Cálculo da dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor

O próximo lema nos sugere um valor para a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor.

Lema 3.8 *Seja K o conjunto de Cantor e suponha que existe $s_0 > 0$ tal que $0 < \mathcal{H}^{s_0}(K) < \infty$. Então $s_0 = \frac{log2}{log3}$.*

Figura 2: Medida de Hausdorff.

Prova. O conjunto de Cantor pode ser decomposto como

$$K_1 \bigcup K_2 = K,$$

onde $K_1 = K \bigcap \left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $K_2 = K \bigcap \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Note que estas duas partes são geometricamentes similares a K, porém reduzidas de um fator $\frac{1}{3}$.
Pelas Proposições 2, 3 e 4 temos que:

$$\mathcal{H}^{s_0}(K) = \mathcal{H}^{s_0}(K_1) + \mathcal{H}^{s_0}(K_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{s_0} \mathcal{H}^{s_0}(K) + \left(\frac{1}{3}\right)^{s_0} \mathcal{H}^{s_0}(K) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{s_0} \mathcal{H}^{s_0}(K).$$

Como $0 < \mathcal{H}^{s_0}(K) < \infty$, dividindo ambos os lados da igualdade por $\mathcal{H}^{s_0}(K)$, obtemos:

$$1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{s_0}.$$

Aplicando logaritmo nos dois lados e isolando s_0, chegamos que:

$$s_0 = \frac{log2}{log3},$$

completando a demonstração. $\square$

Agora vamos provar que a hipótese do lema anterior é satisfeita para $s_0 = \frac{log2}{log3}$, o que garante que este valor é a dimensão do conjunto de Cantor, como havíamos calculado por outros métodos.

Teorema 3.9 *Seja K o conjunto de Cantor e $s_0 = \frac{log2}{log3}$. Então $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^{s_0}(K) \leq 1$ e portanto $D_h(K) = \frac{log2}{log3}$.*

Vimos que na n-ésima etapa de construção do conjunto de Cantor o comprimento de cada segmento é 3^{-n}. Vamos considerar a cobertura $\{Y_i\}$ formada por estes segmentos. Desta forma $\{Y_i\}$ consiste de 2^n intervalos de comprimento 3^{-n}.
Pela Definição 3.3 e tomando $\delta = 3^{-n}$ temos:

$$\mathcal{H}^{s_0}_{3^{-n}}(K) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} |X_i|^{s_0} \mid \{X_i\} \text{ é } \ \delta\text{-cobertura para F} \right\}.$$

Assim, temos a desigualdade:

$$\mathcal{H}^{s_0}_{3^{-n}}(K) \leq \sum_{i=1}^{n} |Y_i|^{s_0} = 2^n \, 3^{-ns_0}.$$

Pela hipótese $s_0 = \frac{log2}{log3}$, que é equivalente a $3^{s_0} = 2$, substituindo e fazendo algumas manipulações, chegamos que:

$$\mathcal{H}^{s_0}_{3^{-n}}(K) \leq 1.$$

Aplicando o limite com $n \to \infty$ e notando que isto é equivalente a $\delta \to 0$, chegamos que:

$$\mathcal{H}^{s_0}(K) \leq 1.$$

Agora mostraremos que $\mathcal{H}^{s_0}(K) \geq \frac{1}{2}$.
Assumindo agora que $\{X_i\}$ são intervalos, podemos fazer isto pois estamos tratando do conjunto de Cantor, que é um subconjunto de $I\!R$, notamos que para todo i existe $n \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\frac{1}{3^{n+1}} \leq |X_i| < \frac{1}{3^n}.$$

Considere $m \geq n$. Como $|X_i| < \frac{1}{3^n}$ podemos concluir que o número máximo de interseções de cada X_i com a etapa m de construção do conjunto de Cantor é 2^{m-n}.
Por hipótese temos que $3^{s_0} = 2$ então:

$$2^{m-n} = 2^m.2^{-n} = 2^m.3^{-s_0 n}$$

Como $|X_i| \geq \frac{1}{3^{n+1}}$, temos que $3^{-n} \leq 3|X_i|$ e

$$2^{m-n} = 2^m.3^{-s_0 n} \leq 2^m.3^{s_0}|X_i|^{s_0}.$$

Assim o número máximo de interseções, é inferior a $2^m.3^{s_0}|X_i|^{s_0}$. Portanto o número total T de interseções da cobertura $\{X_i\}$ com a etapa m da construção do conjunto de Cantor é inferior a

$$\sum_{i=1}^{n} 2^m 3^{s_0} |X_i|^{s_0}.$$

Por outro lado, na etapa m, temos 2^m segmentos e consequentemente $T \geq 2^m$. Assim,

$$2^m \leq \sum_{i=1}^{n} 2^m 3^{s_0} |X_i|^{s_0},$$

e

$$1 \leq 3^{s_0} \sum_{i=1}^{n} |X_i|^{s_0}.$$

Como $3^{s_0} = 2$, temos

$$\frac{1}{2} = 3^{-s_0} \leq \sum_{i=1}^{n} |X_i|^{s_0}.$$

Tomando o ínfimo e aplicando o limite chegamos que:

$$\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^{s_0}(K).$$

Desta forma provamos que:

$$\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^{s_0}(K) \leq 1.$$

Pelo Teorema 3.6, temos que para $s_0 = \frac{log2}{log3}$,

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & \text{se} \quad s < s_0 \\ 0, & \text{se} \quad s > s_0 \end{cases}$$

portanto a dimensão de Hausdorff $D_h(F) = s_0$, completando a demonstração. $\square$

4 Conclusão

Neste trabalho, pudemos perceber a diferença entre a dimensão espacial e a dimensão topológica, que em figuras tradicionais este conceito se confunde. Porém nas figuras fractais vemos claramente esta distinção, onde sua dimensão espacial é estritamente maior que sua dimensão topológica. Vimos dois métodos para calcular a dimensão destas figuras: o método da auto-similaridade, usado quando uma figura apresenta auto-similaridade estrita e o método de contagem de caixas, usado quando um fractal não apresenta essa característica. E finalmente, formalizamos todo esse conceito através da Dimensão de Hausdorff. Para exemplificar e entendermos como são aplicados, calculamos a dimensão do conjunto de Cantor pelos dois métodos. Em cada método chegamos ao valor $\frac{log2}{log3}$, que também foi obtido por meio do conceito de Dimensão de Hausdorff. Com isso, tendo provado que a dimensão do conjunto de Cantor é $\frac{log2}{log3}$, mostramos que sua dimensão espacial é estritamente maior que sua dimensão topológica, que é zero, sendo, portanto, o conjunto de Cantor um fractal.

Referências

[1] K. Falconer: *Fractal Geometry: mathematical foundations and applications.* John Wiley and Sons, Chichester: 1990.

[2] G.B. Folland: *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* 2ªed. Wirley Interscience, Canada: 1999.

[3] E.L.Lima: *Análise Real.* Coleção Matemática Universitária. 8ªed.IMPA, Rio de Janeiro: 2004.

[4] F.L. de Melo: *O conjunto e a função de Cantor.* Monografia de Especialização para professores de Matemática - UFPR, Curitiba: 2007.

[5] Murr, et al.: *Fractais: propriedades e construção.* Prodocência - UFPR, Curitiba: 2007.

[6] H.L. Royden: *Real Analysis.* 3ªed. Prentice Hall, New Jersey: 1988.

[7] C.P. Serra and E.W. Karas: *Fractais Gerados por Sistemas Dinâmico Complexos.* Champanhat, Curitiba: 1997.