CMM052: Equações Diferenciais, de Diferença e Aplicações

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1

Exercício 1 *Obtenha as soluções dos P.V.I's abaixo*

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = 2te^{2t} \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} ty'(t) + 2y(t) = sen(t) \\ y(\pi/2) = 1 \end{cases}$$

Exercício 2 *Considere a e λ duas constantes positivas e b um número real qualquer. Mostre que toda solução da equação*

$$y'(t) + ay(t) = be^{-\lambda t}$$

converge para zero quando $t \to +\infty$.

Exercício 3 *Considere a equação diferencial*

$$y'(t) + i\omega y(t) = if(t), \ \omega \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

na qual y e f são funções 2π-periódicas. (Em particular, $y(0) = y(2\pi)$ e $f(0) = f(2\pi)$).

(a) Mostre que a solução de (1) é dada por

$$y(t) = \xi \exp(-i\omega t) + i \int_0^t \exp(i\omega(s-t)) f(s) ds,$$

sendo $\xi \in \mathbb{C}$.

(b) Mostre que se $\omega \notin \mathbb{Z}$, então ξ é obtido de modo único. Mais do que isso, temos

$$y(t) = \frac{i}{1 - e^{-2\pi i\omega}} \int_0^{2\pi} \exp(-i\omega s) f_j(t-s) ds, \tag{2}$$

(c) Quais são as soluções da equação homogênea

$$y'(t) + i\omega y(t) = 0, \ \omega \in \mathbb{C}?$$

Exercício 4 *Obtenha as soluções dos P.V.I's abaixo*

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(\pi/4) = 2, \ y'(\pi/4) = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0 \\ y(0) = 2, \ y'(0) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0 \\ y(0) = 2, \ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Exercício 5 *Demonstre a formula de Euler*

$$e^{it} = cos(t) + isen(t),\ t \in \mathbb{R},$$

através os seguintes passos:

(a) *Mostre que $y_1(t) = cos(t)$ e $y_2(t) = sen(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação*

$$y''(t) + y(t) = 0. \tag{3}$$

(b) *Mostre que $y(t) = e^{it}$ é uma solução de (3).*

(c) *Devem existir constantes c_1 e c_2 tais que*

$$e^{it} = c_1 cos(t) + c_2 sen(t).$$

Por que isso é verdade?

1. *Utilizando o fato*

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t},\ \lambda \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R},$$

mostre que $c_1 = 1$ e $c_2 = i$.

Exercício 6 *Se o wronskiano de duas soluções quaisquer de $y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t) = 0$ é constante, o que isso implica sobre os coeficientes p e q?*