CMM052: Equações Diferenciais, de Diferença e Aplicações

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

Prova 3: 9/08

Exercício 1 (20 pontos) *Sejam p, q e g funções contínuas num intervalo aberto I e a equação*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \tag{1}$$

Considere ainda $\{y_1, y_2\}$ um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{2}$$

(a) *Mostre que se Y_1 e Y_2 são duas soluções de (1), então $y = Y_1 - Y_2$ é uma solução de (2).*

(b) *Mostre que se Y é uma solução de (1), então existem constantes c_1, c_2 tais que a solução geral de (1) é $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + Y$.*

Exercício 2 (20 pontos) *Considere a equação (1) com $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$ e as novas equações*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g_1(t). \tag{3}$$

e

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g_2(t). \tag{4}$$

Mostre que se Y_1 é uma solução de (3) e Y_2 é uma solução de (4), então $Y = Y_1 + Y_2$ é uma solução de (1).

Exercício 3 (30 pontos) *Obtenha a solução do P.V.I.*

$$\begin{cases} y'' + 4y' = t^2 + 3e^t \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Exercício 4 (30 pontos) *Considere a equação*

$$t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1, \ t > 0, \tag{5}$$

e suponha que o par $y_1(t) = t^2$, $y_2(t) = t^{-1}$ forma um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada.

(a) *Obtenha uma solução particular de (5).*

(b) *Obtenha a solução geral de (5).*

Você pode utilizar o seguinte fato:

- Nas condições do exercício 1, uma solução particular de (1) é

$$Y(t) = -y_1(t) \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt.$$