CMM 031 Álgebra Linear

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 1

Exercício 1 *Resolva os exercícios sugeridos em aula.*

Exercício 2 *Prove os resultados não demonstrados em sala.*

Exercício 3 *Mostre que o conjunto*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4 *Considere o conjunto*

$$V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; a, b > 0\}$$

e as operações

$$(a, b) \oplus (c, d) = (ac, bd) \quad e \quad \alpha \cdot (a, b) = (a^\alpha, b^\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mostre que V *é um espaço vetorial.*

Exercício 5 *Mostre que em* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *dos polinômios* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o conjunto*

$$\beta = \{p_k,\ k = 0, 1, \ldots\},$$

é uma base, sendo $p_0(x) \equiv 1$ *e* $p_k(x) = x^k$.

Exercício 6 *Mostre que um conjunto* β *de um espaço vetorial é L.D. se, e somente se, existe um* $v \in \beta$ *que é combinação linear de elementos em* $\beta \setminus \{v\}$.

Exercício 7 *Considere* $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$ *o conjunto dos polinômios reais de grau menor que* n. *Mostre que o seguinte conjunto é subespaço de* $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$:

$$S = \{p \in \mathcal{P}^n(\mathbb{R});\ p(0) = 0\}.$$

Exercício 8 *Considere* $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ *das funções de classe* $C^{(2)}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Considere* S *o conjunto das funções* $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ *que são soluções da equação diferencial*

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

Mostre que S *é subespaço de* $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

Exercício 9 *O núcleo de uma matriz* $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *é o conjunto*

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}.$$

(a) *Mostre que* $N(A)$ *é subespaço de* $\mathbb{R}^n$.

(b) *Mostre que se os vetores colunas de* A *são L.I., então* $N(A) = \{0\}$.

(c) *Determine o núcleo da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 10 *Verifique se os conjuntos abaixo são ou não subespaços de* $\mathbb{R}^3$.

- $\{(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$.
- $\{(2,1,-2),(3,2,-2),(2,2,0)\}$.

Exercício 11 *Verifique se os conjuntos abaixo são ou não subespaços de* $\mathbb{R}^2$.

- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$.
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$.
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = 3y + 2\}$.
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$.

Exercício 12 *Considere* $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *fixada. Verifique se os conjuntos abaixo são subespaços ou não de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) $\{B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}); AB = BA\}$.

(b) $\{B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}); AB \neq BA\}$.

(c) $\{B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}); BA = 0\}$