CMM 031 Álgebra Linear

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA 4

Obs: A menos de menção contrária, todos os espaços vetoriais são de dimensão finita.

Exercício 1 *Abaixo temos transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$. Determine os autovalores e autovetores e verifique quais são diagonalizáveis.*

(a) $T(x, y) = (-x, y)$

(b) $T(x, y) = (y, x)$

(c) $T(x, y) = (x, y)$

(d) $T(x, y) = -(x, y)$

(e) $T(x, y) = (x\,cos(\theta) - y\,sen(\theta), x\,sen(\theta) + y\,cos(\theta))$, *com* $\theta \in \mathbb{R}$ *fixado.*

Exercício 2 *Verifique que* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x, y, z) = (x+z, y+z, x+y+2z)$ *é diagonalizável.*

Exercício 3 *Considere* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *um operador linear tal que*

$$T(1, 0, 0) = (2, 3, 1),\ T((1, 1, 0) = (5, 2, 7) \quad e \quad T(1, 1, 1) = (-2, 0, 7).$$

(a) Obtenha os autovalores e os autoespaços de T.

(b) T *é diagonalizável?*

Exercício 4 *Determine* $m, n \in \mathbb{R}$ *de modo que a matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

seja diagonalizável.

Exercício 5 *Verifique se as matrizes abaixo são diagonalizáveis.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 6 *Considere* $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ *o operador linear tal que*

$$T(p_0)(t) = 1 + t,\ T(p_1)(t) = t + t^2 \quad e \quad T(p_2)(t) = 1 + t - 2t^2,$$

sendo $p_j(t) = t^j,\ j = 0, 1, 2.$

(a) *Determine Tp, para qualquer $p \in \mathcal{P}_2$.*

(b) *Obtenha os autovalores e os autoespaços de T.*

(c) *T é diagonalizável?*

Exercício 7 *Considere $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o operador linear tal que*

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$
$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) *Obtenha os autovalores e os autoespaços de T.*

(b) *T é diagonalizável?*

Exercício 8 *Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear qualquer e seja A a matriz de T com respeito a alguma base de $\mathbb{R}^2$. Seja $Tr(A)$ o traço de A e $det(A)$ seu determinante.*

(a) *Mostre que*
$$P_T(x) = x^2 - Tr(A)x + det(A).$$

(b) *Mostre que T é um isomorfismo se, e somente se, ou não possui autovalores reais, ou eles são reais e não nulos.*

(c) *Sob quais condições T é diagonalizável?*

(d) *Verifique que se A é simétrica, então é diagonalizável.*

Exercício 9 *Dizemos que duas matrizes $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ são semelhantes se existe uma matriz inversível $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que*
$$A = S^{-1} \cdot B \cdot S$$

Mostre que matrizes semelhantes possuem os mesmos autovalores.

Exercício 10 *Obtenha o polinômio característico de uma matriz triangular.*

Exercício 11 *Sejam A e B duas matrizes triangulares com a mesma diagonal principal. Existe alguma relação entre seus polinômios característico? Qual?*

Exercício 12 *Mostre que se λ é autovalor de $T \in \mathscr{L}(U)$, então λ^n é autovalor de T^n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.*

Exercício 13 *Se $T \in \mathscr{L}(U)$ é um isomorfismo, qual a relação entre os autovalores de T e de T^{-1}?*

Exercício 14 *Mostre que se $T \in \mathscr{L}(U)$ é diagonalizável, então $P_T(T) = 0$.*

Exercício 15 *Seja $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Mostre que se e^A é uma matriz inversível, sendo*

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$