

LISTA 6

Obs: A menos de menção contrária, todos os espaços vetoriais são de dimensão finita.

Exercício 1 Verifique se cada uma das funções abaixo é um produto interno no espaço V indicado.

(a) $V = \mathbb{R}^2$. $f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1x_2 + 4y_1y_2$.

(b) $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. $f(A, B) = \text{tr}(B^t A)$.

(c) $V = \mathcal{P}_3$. $f(p, q) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, em que $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$.

Exercício 2 Sejam $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ números reais positivos. Mostre que

$$(a_1 + a_2 + a_3) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) \geq 9$$

Exercício 3 Para cada um dos itens abaixo determinar

$$\langle u, v \rangle, \|u\|, \|v\| \text{ e } \angle u, v$$

(a) $V = \mathbb{R}^3$, com o produto usual. $u = (1, 2, 1)$ e $v = (3, 4, 2)$.

(b) $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, com $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(c) $V = \mathcal{P}_2$, com $\langle f, g \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. $p(x) = 1 + x$ e $q(x) = x/4 + 3x^2$.

Exercício 4 Verifique se os conjuntos abaixo são ortonormais.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, com o produto usual.

$$S = \{(1, 0), (3, 5)\}$$

(b) $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, com $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Exercício 5 Considere $V = \mathcal{C}([0, 2\pi]; \mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

(a) Mostre que o conjunto

$$S = \{1, \cos(nx), \sin(nx), n \in \mathbb{N}\}$$

é ortogonal.

(b) A partir de S encontre um conjunto ortonormal em V .

(c) Conclua que V tem dimensão infinita.

Exercício 6 Determine $U^\perp$, sendo $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y - z = 0\}$.

Exercício 7 Obtenha uma base ortonormal de $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y = 0\}$.

Exercício 8 Obtenha uma base ortonormal de $\mathcal{P}_2$, com $\langle f, g \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

Exercício 9 Sejam $\mathcal{P}_3$, com $\langle f, g \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, e

$$p(x) = 1 + x + x^2 \quad e \quad W = \text{ger}(\{q(x) = x^3 - x\}).$$

Obtenha a projeção de p sobre W .

Exercício 10 Obter a projeção ortogonal de $u = (2, 3, 1)$ sobre

$$U = \text{ger} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\}$$

Exercício 11 Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, $v = (3, 0, 2)$ e W o espaço gerado por $\{(1, 0, 2), (1, 1, 1)\}$. Obtenha a projeção de v sobre W .

Exercício 12 Considere $V = \mathcal{C}([-1, 1]; \mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

Obtenha $W^\perp$, em que W denota o espaço das funções ímpares em V .

Exercício 13 Considere $V = \mathcal{C}([0, 2\pi]; \mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Determine a função de $W = \text{ger}(\{1, \sin(t), \cos(t)\})$ que melhor se aproxima de $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t - 1$.

Exercício 14 Determine a reta de $\mathbb{R}^2$ que melhor se ajusta os pontos $(-1, -10)$, $(0, -6)$, $(1, -4)$ e $(2, -2)$.

Exercício 15 Determine a melhor solução real aproximada do sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - y = 0 \\ 2x + 2y = 2. \end{cases}$$

Exercício 16 Seja $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ um conjunto ortogonal de vetores não nulos num espaço com produto interno V .

(a) Mostre que

$$\sum_{k=1}^m \frac{|\langle v, v_k \rangle|^2}{\|v_k\|^2} \leq \|v\|^2, \quad \forall v \in V.$$

(b) Mostre que vale a igualdade acima se, e somente se,

$$v = \sum_{k=1}^m \frac{|\langle v, v_k \rangle|^2}{\|v_k\|^2} v_k.$$

Exercício 17 Uma isometria entre espaços com produto interno $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ e $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle_U)$ é uma transformação linear $T : U \rightarrow V$ que satisfaz

$$\langle T(x), T(y) \rangle_V = \langle x, y \rangle_U, \quad \forall x, y \in U.$$

(a) Mostre que toda rotação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria.

(b) Mostre que são equivalentes

(i) T é uma isometria.

(ii) $\|T(u)\|_V = \|u\|_U$, para todo $u \in U$.

(iii) $\|T(x) - T(y)\|_V = \|x - y\|_U$, para todo $x, y \in U$.

(iv) Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é ortonormal em U , então $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é ortonormal em V .

(c) Toda isometria é injetiva.

Exercício 18 Determine a quádrlica

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy - 4xz + 4yz - 2x + 2y + 8z = -1$$

Exercício 19 Determine a quádrlica

$$7x^2 + 17y^2 + 7z^2 - 4xy + 6xz - 4yz - 6x - 12y - 6z = -1$$