CMM 031 Álgebra Linear

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

LISTA AVALIATIVA 2 // ENTREGAR NO DIA DA PROVA - 4 de junho

Exercício 1 *Fixado $\theta \in \mathbb{R}$, mostre que função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$T(x, y) = (x\,cos(\theta) - y\,sen(\theta), x\,sen(\theta) + y\,cos(\theta))$$

é linear. Obtenha a representação matricial de T com respeito a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Verifique também se T é diagonalizável.

Exercício 2 *Mostre que a função $F : \mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R}) \to \mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R})$ que associa a cada função $f \in \mathscr{C}([a, b]; \mathbb{R})$ a função $F(f) : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(f)(x) = \int_a^x f(t)dt, \ x \in [a, b]$$

é linear. F é injetivo? Sobrejetivo?

Exercício 3 *Mostre que $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é linear se, e somente se, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $T(x) = ax$.*

Exercício 4 *Considere $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o operador linear tal que*

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$
$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $T(X)$, para qualquer $X \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) T é injetora?

(c) T é sobrejetora?

Exercício 5 *Verifique se os espaços abaixo são isomorfos.*

(a) $U = \mathbb{R}^2$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$.

(b) $U = \mathbb{R}^3$ e $V = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R});\ A^t = A\}$.

Exercício 6 *Mostre que as transformações lineares $T, R, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, dadas por*

$$T(x, y) = (x, 2y),\ R(x, y) = (x, x + y),\ S(x, y) = (0, x),$$

formam um subconjunto L.I. em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Exercício 7 *Considere $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ o operador linear tal que*

$$T(p_0)(t) = 1 + t,\ T(p_1)(t) = t + t^2 \quad e \quad T(p_2)(t) = 1 + t - 2t^2,$$

sendo $p_j(t) = t^j,\ j = 0, 1, 2$.

(a) *Determine Tp, para qualquer $p \in \mathcal{P}_2$.*

(b) *Obtenha os autovalores e os autoespaços de T.*

(c) *T é diagonalizável?*

Exercício 8 *Considere $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ o operador linear tal que*

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$
$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) *Obtenha os autovalores e os autoespaços de T.*

(b) *T é diagonalizável?*

Exercício 9 *Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear qualquer e seja A a matriz de T com respeito a alguma base de $\mathbb{R}^2$. Seja $Tr(A)$ o traço de A e $det(A)$ seu determinante.*

(a) *Mostre que*
$$P_T(x) = x^2 - Tr(A)x + det(A).$$

(b) *Mostre que T é um isomorfismo se, e somente se, ou não possui autovalores reais, ou eles são reais e não nulos.*

(c) *Sob quais condições T é diagonalizável?*

(d) *Verifique que se A é simétrica, então é diagonalizável.*

Exercício 10 *Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que*

$$T(1,0,0) = (2,3,1),\ T((1,1,0) = (5,2,7) \quad e \quad T(1,1,1) = (-2,0,7).$$

(a) *Obtenha os autovalores e os autoespaços de T.*

(b) *T é diagonalizável?*