CMM 031 Álgebra Linear

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

Prova 2

(A maior nota possível é 100 pontos.)

Exercício 1 (30 pontos) *Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas exibindo uma demonstração, ou contra-exemplo.*

(a) A função $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, definida por* $T(x, y, z) = -x$*, é linear.*

(b) A função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, definida por* $T(x, y) = x^2 + 1$*, é linear.*

(c) O polinômio característico de uma transformação linear $T : U \to U$*, sendo* U *de dimensão finita, não depende da base escolhida para* U*.*

Exercício 2 (20 pontos) *Responda (exibindo uma demonstração) a seguinte pergunta: Pode existir uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *injetora?*

Exercício 3 (30 pontos) *Sejam* $\mathscr{P}_2$ *o espaço vetorial dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2 e considere a transformação linear* $T : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ *definida por* $Tp = p'$*.*

(a) Obtenha a matriz de T*, com respeito a base* $\beta = \{1, x, x^2\}$*.*

(b) Obtenha os autovalores de T *e os respectivos auto-espaços.*

(c) T *é diagonalizável?*

Exercício 4 (20 pontos) *Considere a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, dada por*

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$$

(a) Obtenha os autovalores de T *e os respectivos auto-espaços.*

(b) T *é diagonalizável?*

Exercício 5 (20 pontos) *Sejam* A *uma matriz real de dimensão 2,* $Tr(A)$ *o seu traço (isto é, a soma dos elementos na diagonal principal) e* $det(A)$ *seu determinante.*

(a) Mostre que o polinômio característico de A *é*

$$P(x) = x^2 - Tr(A)x + det(A).$$

(b) Mostre que toda matriz simétrica é diagonalizável.

Dica 1 *Talvez seja útil saber que:*

- *as raízes do polinômio* $p(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ *são* $x_1 = 0$*,* $x_2 = 1$ *e* $x_3 = 3$*.*
- *se* $T \in \mathcal{L}(U, V)$*, com* $dim(U) = n$*, então* $n = dim(N(T)) + dim(Im(T))$*.*