CMM 031 Álgebra Linear

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

Prova 1

Exercício 1 (30 pontos) *Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.*

(a) *Para* $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *fixada, o conjunto* $S = \{B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}); AB = BA\}$ *é um subespaço de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) *O conjunto* $\{cos(x), sen(x)\}$ *é linearmente dependente em* $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

(c) *Existe um conjunto linearmente independente em* $\mathbb{R}^4$ *com 5 vetores.*

Exercício 2 (30 pontos) *O núcleo de uma matriz* $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ *é o conjunto*

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}.$$

(a) *Mostre que* $N(A)$ *é subespaço de* $\mathbb{R}^n$.

(b) *Mostre que se os vetores colunas de A são L.I., então* $N(A) = \{0\}$.

(c) *Determine o núcleo da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(d) *Obtenha uma base para o núcleo da matriz A do item (c).*

(e) *Obtenha uma base para o espaço linha da matriz A do item (c).*

(f) *Obtenha uma base para o espaço coluna da matriz A do item (c).*

Exercício 3 (20 pontos) *Determine a dimensão e obtenha uma base para o espaço gerado pelo conjuntos de vetores*

$$S = \{(1,2,-1,0), (2,5,-3,2), (2,4,-2,0), (3,8,-5,4)\}.$$

Exercício 4 (20 pontos) *Considere em* $\mathbb{R}^3$ *as bases* $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ *e* $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *tais que*

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + u_3 \\ v_2 = u_1 - u_2 \\ v_3 = u_2 - u_3 \end{cases}$$

(a) *Obtenha* $[S]_{A,B}$ *e* $[S]_{B,A}$.

(b) *Dado* $v_A = (1, 0, -1)_A$, *obtenha* v_B.

- Talvez seja útil saber que

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$