CMM 031 Álgebra Linear

Professor: **Fernando de Ávila Silva**

Departamento de Matemática - UFPR

Prova Sub. (P1 e P2)

(A nota desta prova irá substituir a menor dentre a P1 e a P2)

Exercício 1 (30 pontos) *Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.*

(a) *Para $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ fixada, o conjunto $S = \{B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}); AB = BA\}$ é um subespaço de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.*

(b) *O conjunto $\{cos(x), sen(x)\}$ é linearmente dependente em $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$.*

(c) *Existe um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^4$ com 5 vetores.*

(d) *Existe uma transformação linear injetora $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.*

(e) *A função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $T(x, y) = x^2 + 1$, é linear.*

(f) *O polinômio característico de uma transformação linear $T : U \to U$, sendo U de dimensão finita, não depende da base escolhida para U.*

Exercício 2 (30 pontos) *O núcleo de uma matriz $A_{mn} \in \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ é o conjunto*

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}.$$

(a) *Mostre que $N(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^n$.*

(b) *Mostre que se os vetores colunas de A são L.I., então $N(A) = \{0\}$.*

(c) *Determine o núcleo da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(d) *Obtenha uma base para o núcleo da matriz A do item (c).*

(e) *Obtenha uma base para o espaço linha da matriz A do item (c).*

(f) *Obtenha uma base para o espaço coluna da matriz A do item (c).*

Exercício 3 (20 pontos) *Sejam $\mathscr{P}_2$ o espaço vetorial dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2 e considere a transformação linear $T : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$ definida por $Tp = p'$.*

(a) *Obtenha a matriz de T, com respeito a base $\beta = \{1, x, x^2\}$. Determine os autovalores de T e os respectivos auto-espaços.*

(b) *T é diagonalizável?*

Exercício 4 (20 pontos) *Sejam A uma matriz real de dimensão 2, $Tr(A)$ o seu traço (isto é, a soma dos elementos na diagonal principal) e $det(A)$ seu determinante.*

(a) *Mostre que o polinômio característico de A é*

$$P(x) = x^2 - Tr(A)x + det(A).$$

(b) *Mostre que toda matriz simétrica 2×2 é diagonalizável.*