

CMM 031

Álgebra Linear

S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



APRESENTAÇÃO DO CURSO

Ementa: Espaços vetoriais. Transformações lineares. Autovalores, autovetores e a diagonalização de operadores. Espaços vetoriais reais com produto interno. Método dos mínimos quadrados. Operadores autoadjuntos. Formas quadráticas.

APRESENTAÇÃO DO CURSO

Ementa: Espaços vetoriais. Transformações lineares. Autovalores, autovetores e a diagonalização de operadores. Espaços vetoriais reais com produto interno. Método dos mínimos quadrados. Operadores autoadjuntos. Formas quadráticas.

Critérios de avaliação: Listas e provas.

PLANO

Programa	Conteúdo
Parte I	Espaços vetoriais
Parte II	Transformações lineares
Parte III	Produto interno

BIBLIOGRAFIA



COELHO, F. U. INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR. ED. LIVRARIA DA FÍSICA, SÃO PAULO.



LEON, S. J. ÁLGEBRA LINEAR COM APLICAÇÕES.

NÚMEROS COMPLEXOS

O CONJUNTO \mathbb{C}

Considere o conjunto

$$\mathbb{C} = \{a + ib, a, b \in \mathbb{R}\}$$

onde i é chamado de unidade imaginária. Em \mathbb{C} consideramos as seguintes operações: dados $z = a + ib$ e $w = c + id$ definimos

$$z + w = (a + c) + i(b + d)$$

$$z \cdot w = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

NÚMEROS COMPLEXOS

O CONJUNTO \mathbb{C}

Considere o conjunto

$$\mathbb{C} = \{a + ib, a, b \in \mathbb{R}\}$$

onde i é chamado de unidade imaginária. Em \mathbb{C} consideramos as seguintes operações: dados $z = a + ib$ e $w = c + id$ definimos

$$z + w = (a + c) + i(b + d)$$

$$z \cdot w = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

- Note que $i \cdot i = -1$.
- Dizemos que a é a parte real de z e que b é sua parte imaginária.
- Escrevemos ainda $\bar{z} = a - ib$.
- Escrevemos também $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

NÚMEROS COMPLEXOS

O CONJUNTO \mathbb{C}

Considere o conjunto

$$\mathbb{C} = \{a + ib, a, b \in \mathbb{R}\}$$

onde i é chamado de unidade imaginária. Em \mathbb{C} consideramos as seguintes operações: dados $z = a + ib$ e $w = c + id$ definimos

$$z + w = (a + c) + i(b + d)$$

$$z \cdot w = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

- Note que $i \cdot i = -1$.
- Dizemos que a é a parte real de z e que b é sua parte imaginária.
- Escrevemos ainda $\bar{z} = a - ib$.
- Escrevemos também $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

TEOREMA (FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA)

Todo polinômio de grau $n \geq 1$ com coeficiente em \mathbb{C} possui exatamente n raízes (contando as multiplicidades).

PROPRIEDADES DE INTERESSE

- Com respeito as operações $+$ e \cdot em \mathbb{C} temos as seguintes propriedades:

(A1) $z + w = w + z, \forall z, w \in \mathbb{C}.$

(A2) $(z + w) + u = z + (w + u), \forall z, w, u \in \mathbb{C}.$

(A3) Existe um elemento $0 \in \mathbb{C}$ tal que $z + 0 = z, \forall z \in \mathbb{C}.$

(A4) Para cada $z \in \mathbb{C}$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $z + w = 0.$

PROPRIEDADES DE INTERESSE

- Com respeito as operações $+$ e \cdot em \mathbb{C} temos as seguintes propriedades:

(A1) $z + w = w + z, \forall z, w \in \mathbb{C}.$

(A2) $(z + w) + u = z + (w + u), \forall z, w, u \in \mathbb{C}.$

(A3) Existe um elemento $0 \in \mathbb{C}$ tal que $z + 0 = z, \forall z \in \mathbb{C}.$

(A4) Para cada $z \in \mathbb{C}$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $z + w = 0.$

(M1) $z \cdot w = w \cdot z, \forall z, w \in \mathbb{C}.$

(M2) $(z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u), \forall z, w, u \in \mathbb{C}.$

(M3) Existe um elemento $1 \in \mathbb{C}$ tal que $1 \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{C}.$

(M4) Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot w = 1.$

PROPRIEDADES DE INTERESSE

- Com respeito as operações $+$ e \cdot em \mathbb{C} temos as seguintes propriedades:

(A1) $z + w = w + z, \forall z, w \in \mathbb{C}.$

(A2) $(z + w) + u = z + (w + u), \forall z, w, u \in \mathbb{C}.$

(A3) Existe um elemento $0 \in \mathbb{C}$ tal que $z + 0 = z, \forall z \in \mathbb{C}.$

(A4) Para cada $z \in \mathbb{C}$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $z + w = 0.$

(M1) $z \cdot w = w \cdot z, \forall z, w \in \mathbb{C}.$

(M2) $(z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u), \forall z, w, u \in \mathbb{C}.$

(M3) Existe um elemento $1 \in \mathbb{C}$ tal que $1 \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{C}.$

(M4) Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot w = 1.$

(D4) $(z + w) \cdot u = z \cdot u + w \cdot u, \forall z, w, u \in \mathbb{C}.$

CORPO

DEFINIÇÃO

Um conjunto não vazio \mathbb{K} é dito um corpo se nele estão definidas duas operações $+$ (soma) e \cdot (produto) que satisfazem as seguintes propriedades:

CORPO

DEFINIÇÃO

Um conjunto não vazio \mathbb{K} é dito um corpo se nele estão definidas duas operações $+$ (soma) e \cdot (produto) que satisfazem as seguintes propriedades:

(A1) $z + w = w + z, \forall z, w \in \mathbb{K}.$

(A2) $(z + w) + u = z + (w + u), \forall z, w, u \in \mathbb{K}.$

(A3) Existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que $z + 0 = z, \forall z \in \mathbb{K}.$

(A4) Para cada $z \in \mathbb{K}$, existe $w \in \mathbb{K}$ tal que $z + w = 0.$

CORPO

DEFINIÇÃO

Um conjunto não vazio \mathbb{K} é dito um corpo se nele estão definidas duas operações $+$ (soma) e \cdot (produto) que satisfazem as seguintes propriedades:

$$(A1) \quad z + w = w + z, \quad \forall z, w \in \mathbb{K}.$$

$$(A2) \quad (z + w) + u = z + (w + u), \quad \forall z, w, u \in \mathbb{K}.$$

$$(A3) \quad \text{Existe um elemento } 0 \in \mathbb{K} \text{ tal que } z + 0 = z, \quad \forall z \in \mathbb{K}.$$

$$(A4) \quad \text{Para cada } z \in \mathbb{K}, \text{ existe } w \in \mathbb{K} \text{ tal que } z + w = 0.$$

$$(M1) \quad z \cdot w = w \cdot z, \quad \forall z, w \in \mathbb{K}.$$

$$(M2) \quad (z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u), \quad \forall z, w, u \in \mathbb{K}.$$

$$(M3) \quad \text{Existe um elemento } 1 \in \mathbb{K} \text{ tal que } 1 \cdot z = z, \quad \forall z \in \mathbb{K}.$$

$$(M4) \quad \text{Para cada } z \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \text{ existe } w \in \mathbb{K} \text{ tal que } z \cdot w = 1.$$

CORPO

DEFINIÇÃO

Um conjunto não vazio \mathbb{K} é dito um corpo se nele estão definidas duas operações $+$ (soma) e \cdot (produto) que satisfazem as seguintes propriedades:

$$(A1) \quad z + w = w + z, \quad \forall z, w \in \mathbb{K}.$$

$$(A2) \quad (z + w) + u = z + (w + u), \quad \forall z, w, u \in \mathbb{K}.$$

$$(A3) \quad \text{Existe um elemento } 0 \in \mathbb{K} \text{ tal que } z + 0 = z, \quad \forall z \in \mathbb{K}.$$

$$(A4) \quad \text{Para cada } z \in \mathbb{K}, \text{ existe } w \in \mathbb{K} \text{ tal que } z + w = 0.$$

$$(M1) \quad z \cdot w = w \cdot z, \quad \forall z, w \in \mathbb{K}.$$

$$(M2) \quad (z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u), \quad \forall z, w, u \in \mathbb{K}.$$

$$(M3) \quad \text{Existe um elemento } 1 \in \mathbb{K} \text{ tal que } 1 \cdot z = z, \quad \forall z \in \mathbb{K}.$$

$$(M4) \quad \text{Para cada } z \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \text{ existe } w \in \mathbb{K} \text{ tal que } z \cdot w = 1.$$

$$(D4) \quad (z + w) \cdot u = z \cdot u + w \cdot u, \quad \forall z, w, u \in \mathbb{K}.$$

EXEMPLOS

- Os conjuntos \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} são corpos.

EXEMPLOS

- Os conjuntos \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} são corpos.
- O conjunto \mathbb{Z} não é um corpo.

EXEMPLOS

- Os conjuntos \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} são corpos.
- O conjunto \mathbb{Z} não é um corpo.
- Seja m um número primo e considere o conjunto

$$\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$$

e as operações

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}, \text{ sendo } c \text{ o resto da divisão de } a + b \text{ por } p$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{c}, \text{ sendo } c \text{ o resto da divisão de } a \cdot b \text{ por } p$$

ALGUMAS PROPRIEDADES

- Note que um corpo \mathbb{K} é uma terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$.

ALGUMAS PROPRIEDADES

- Note que um corpo \mathbb{K} é uma terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$.

TEOREMA

Seja \mathbb{K} um corpo.

- (a) As propriedades $A1, A2, M1, M2$ são válidas para uma quantidade finita de elementos.
- (b) Os elementos 0 e 1 são únicos
- (c) O inverso multiplicativo de um elemento é único. O mesmo para o oposto.
- (d) $a \cdot 0 = 0$, para todo $a \in \mathbb{K}$.
- (e) Se $a \cdot b = 0$, então ou $a = 0$ ou $b = 0$.
- (f) $-a = (-1) \cdot a$, para todo $a \in \mathbb{K}$.
- (g) $(-1) \cdot (-1) = 1$.
- (h) $(-1) \cdot = -1$.
- (i) se $a + b = a + c$, então $b = c$.

SISTEMAS

- Sejam \mathbb{K} um corpo e considere o sistemas linear homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

no qual os coeficientes a_{ij} são elementos de \mathbb{K} e deseja-se obter x_1, \dots, x_n .

SISTEMAS

- Sejam \mathbb{K} um corpo e considere o sistemas linear homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

no qual os coeficientes a_{ij} são elementos de \mathbb{K} e deseja-se obter x_1, \dots, x_n .

- Um método para resolver esse sistema é o escalonamento:
 - (e1) Trocar posição de linhas.
 - (e2) Multiplicar uma equação por uma constante não nula.
 - (e3) Substituir uma linha pela soma desta com alguma outra.

SISTEMAS

- Sejam \mathbb{K} um corpo e considere o sistemas linear homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

no qual os coeficientes a_{ij} são elementos de \mathbb{K} e deseja-se obter x_1, \dots, x_n .

- Um método para resolver esse sistema é o escalonamento:
 - (e1) Trocar posição de linhas.
 - (e2) Multiplicar uma equação por uma constante não nula.
 - (e3) Substituir uma linha pela soma desta com alguma outra.
- A ideia é então obter um sistema mais simples através das operações (e1), (e2) e (e3).

MATRIZ

DEFINIÇÃO

Uma matriz $m \times n$ sobre \mathbb{K} é uma função

$$A : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \rightarrow \mathbb{K},$$

MATRIZ

DEFINIÇÃO

Uma matriz $m \times n$ sobre \mathbb{K} é uma função

$$A : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \rightarrow \mathbb{K},$$

- Utilizamos as notações

$$A(i, j) = a_{ij}$$
$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- O conjunto de todas as matrizes $m \times n$ em \mathbb{K} será denotado por $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.

SOMA DE MATRIZES

- Dadas duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$ definimos $A + B$ como sendo a matriz

$$C = (c_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \dots a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} \dots a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

SOMA DE MATRIZES

- Dadas duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$ definimos $A + B$ como sendo a matriz

$$C = (c_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \dots a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} \dots a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

PROPRIEDADES:

Dadas matrizes A , B e C de mesma ordem tem-se

- (a) $A + B = B + A$.
- (b) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

PRODUTO DE MATRIZES

- Dadas duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$ definimos $A \cdot B$ como sendo a matriz

$$\begin{aligned}
 C = (c_{ij})_{m \times p} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^n \dots a_{1\ell} b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^n \dots a_{1\ell} b_{\ell p} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\ell=1}^n \dots a_{m\ell} b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^n \dots a_{m\ell} b_{\ell p} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

PRODUTO DE MATRIZES

- Dadas duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$ definimos $A \cdot B$ como sendo a matriz

$$\begin{aligned}
 C = (c_{ij})_{m \times p} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^n \dots a_{1\ell} b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^n \dots a_{1\ell} b_{\ell p} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\ell=1}^n \dots a_{m\ell} b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^n \dots a_{m\ell} b_{\ell p} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

PROPRIEDADE:

Vale a igualdade $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

PRODUTO DE MATRIZES

- Dadas duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$ definimos $A \cdot B$ como sendo a matriz

$$\begin{aligned}
 C = (c_{ij})_{m \times p} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^n a_{1\ell} b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^n a_{1\ell} b_{\ell p} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\ell=1}^n a_{m\ell} b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^n a_{m\ell} b_{\ell p} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

PROPRIEDADE:

Vale a igualdade $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

DEFINIÇÃO

A inversa de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, quando existe, é uma matriz $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$A \cdot B = I,$$

sendo $I = (c_{i,k})$, com $c_{ij} = 0$ para $j \neq i$ e $c_{ij} = 1$ para $j = i$.

MATRIZES E SISTEMAS

- Note que o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é equivalente a equação linear

$$A \cdot X = B,$$

sendo

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, X = (x_{i1})_{n \times 1} \text{ e } B = (b_{i1})_{m \times 1}$$

UM CASO PARTICULAR E IMPORTANTE

- Considere \mathbb{K} um corpo e defina o conjunto $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$ (n vezes).
- Em \mathbb{K}^n podemos definir as seguintes operações

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad x, y \in \mathbb{K}^n$$

$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{K}^n.$$

UM CASO PARTICULAR E IMPORTANTE

- Considere \mathbb{K} um corpo e defina o conjunto $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$ (n vezes).
- Em \mathbb{K}^n podemos definir as seguintes operações

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad x, y \in \mathbb{K}^n$$

$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{K}^n.$$

- Fixada uma matriz $A = A_{m \times n}$, podemos definir a função $L_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ pondo

$$L_A(x) = A \cdot x,$$

em que identificamos x com a matriz $x_{n \times 1}$.

NÚCLEO E IMAGEM

Com respeito as notações anteriores, definimos os seguintes conjuntos

$$\text{Kern } L_A = \{x \in \mathbb{K}^n; L_A(x) = 0\} \subset \mathbb{K}^n$$

e

$$\text{Im } L_A = \{L_A(x), x \in \mathbb{K}^n\} \subset \mathbb{K}^m.$$

NÚCLEO E IMAGEM

Com respeito as notações anteriores, definimos os seguintes conjuntos

$$\text{Kern } L_A = \{x \in \mathbb{K}^n; L_A(x) = 0\} \subset \mathbb{K}^n$$

e

$$\text{Im } L_A = \{L_A(x), x \in \mathbb{K}^n\} \subset \mathbb{K}^m.$$

TEOREMA

Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

- (a) $0_n \in \text{Im } L_A$ e $0_m \in \text{Im } L_A$.
- (b) $\lambda x + w \in \text{Kern } L_A$, para todo $x, w \in \text{Kern } L_A$.
- (c) $\lambda y + u \in \text{Im } L_A$, para todo $y, u \in \text{Im } L_A$.

DETERMINANTE

DEFINIÇÃO

O determinante de uma matriz $A_{n \times n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é definido de modo indutivo:

- se $n = 1$, então $A = (a)$ e temos $\det(A) = a$.

DETERMINANTE

DEFINIÇÃO

O determinante de uma matriz $A_{n \times n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é definido de modo indutivo:

- se $n = 1$, então $A = (a)$ e temos $\det(A) = a$.
- supondo $n > 1$ e que definimos $\det(B)$ para todas as matrizes $B_{(m \times M)}$, com $m < n$, temos

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} a_{ij} \det(A_{ij})$$

em que A_{ij} é a matriz de ordem $n - 1$ formada ao se retirar a linha i e a coluna j de A .

DETERMINANTE

DEFINIÇÃO

O determinante de uma matriz $A_{n \times n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é definido de modo indutivo:

- se $n = 1$, então $A = (a)$ e temos $\det(A) = a$.
- supondo $n > 1$ e que definimos $\det(B)$ para todas as matrizes $B_{(m \times M)}$, com $m < n$, temos

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} a_{ij} \det(A_{ij})$$

em que A_{ij} é a matriz de ordem $n - 1$ formada ao se retirar a linha i e a coluna j de A .

TEOREMA

Uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é inversível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.