

CMM 031

Álgebra Linear

S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



TRANSFORMAÇÃO LINEAR

DEFINIÇÃO

Uma transformação linear entre dois $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais V e W é uma função $T : V \rightarrow W$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(1) \quad T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in V.$$

$$(1) \quad T(\lambda x) = \lambda T(x), \quad \forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

LEMA 1

Uma função $T : V \rightarrow W$ entre dois $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais V e W é uma transformação linear se, e somente se,

$$T(\lambda x + y) = \lambda T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

O ESPAÇO $\mathcal{L}(U, V)$

DEFINIÇÃO

Dados dois $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais U e V iremos denotar por $\mathcal{L}(U, V)$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : U \rightarrow V$.

- Quando $U = V$ iremos escrever $\mathcal{L}(U)$.

O ESPAÇO $\mathcal{L}(U, V)$

DEFINIÇÃO

Dados dois $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais U e V iremos denotar por $\mathcal{L}(U, V)$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : U \rightarrow V$.

- Quando $U = V$ iremos escrever $\mathcal{L}(U)$.

PROPOSIÇÃO 1

$\mathcal{L}(U, V)$ é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com respeito as operações usuais de soma e produto por escalar.

O ESPAÇO $\mathcal{L}(U, V)$

DEFINIÇÃO

Dados dois $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais U e V iremos denotar por $\mathcal{L}(U, V)$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : U \rightarrow V$.

- Quando $U = V$ iremos escrever $\mathcal{L}(U)$.

PROPOSIÇÃO 1

$\mathcal{L}(U, V)$ é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com respeito as operações usuais de soma e produto por escalar.

DEFINIÇÃO

O espaço dual de um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial U é o espaço $U^* = \mathcal{L}(U, \mathbb{K})$, ou seja, o conjunto de todas as transformações lineares $T : U \rightarrow \mathbb{K}$. Os elementos de U^* são chamados de funcionais lineares.

A DIMENSÃO DE $\mathcal{L}(U, V)$

PROPOSIÇÃO 2

Se $\dim U = n$ e $\dim V = m$, então $\dim \mathcal{L}(U, V) = mn$.

A DIMENSÃO DE $\mathcal{L}(U, V)$

PROPOSIÇÃO 2

Se $\dim U = n$ e $\dim V = m$, então $\dim \mathcal{L}(U, V) = mn$.

COROLÁRIO

Se $\dim U = n$, então $\dim U^* = \dim U = n$.

BASE DUAL

DEFINIÇÃO (BASE DUAL)

Fixada uma base $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ de U , então a base dual de U^* (com respeito a A) é aquela $\{f_1, \dots, f_n\}$ definida da seguinte forma: para $u = \sum_{j=1}^n x_j u_j$ temos

$$f_j(u) = x_j,$$

ou de modo equivalente

$$f_j(u_k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

BASE DUAL

DEFINIÇÃO (BASE DUAL)

Fixada uma base $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ de U , então a base dual de U^* (com respeito a A) é aquela $\{f_1, \dots, f_n\}$ definida da seguinte forma: para $u = \sum_{j=1}^n x_j u_j$ temos

$$f_j(u) = x_j,$$

ou de modo equivalente

$$f_j(u_k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

EXEMPLO

Vamos determinar a base dual de $\mathbb{R}^3$, com respeito a base

$$\{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)\}.$$

COMPOSIÇÃO

LEMA

Sejam $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$, então a composta $S \circ T$ pertence a $\mathcal{L}(U, W)$.

COMPOSIÇÃO

LEMA

Sejam $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$, então a composta $S \circ T$ pertence a $\mathcal{L}(U, W)$.

EXEMPLO

Considere $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dedas por $T(x, y) = (x + y, 0)$ e $S(a, b) = (a, 2b)$

COMPOSIÇÃO

LEMA

Sejam $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$, então a composta $S \circ T$ pertence a $\mathcal{L}(U, W)$.

EXEMPLO

Considere $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dedas por $T(x, y) = (x + y, 0)$ e $S(a, b) = (a, 2b)$

OBSERVAÇÃO

- Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$, $S \in \mathcal{L}(V, W)$ e $R \in \mathcal{L}(W, Z)$, então $R \circ S \circ T \in \mathcal{L}(U, Z)$ e

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

- Se $S, T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $R \in \mathcal{L}(V, W)$, então

$$R \circ (S + T) = R \circ S + R \circ T.$$

NILPOTENTE

DEFINIÇÃO

Seja $T \in \mathcal{L}(U)$.

- (a) Definimos $T^0 = I$, $T^1 = T$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T^n = T \circ T^{n-1}$.
- (a) Dizemos que T é nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n = 0$.

NILPOTENTE

DEFINIÇÃO

Seja $T \in \mathcal{L}(U)$.

- (a) Definimos $T^0 = I$, $T^1 = T$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T^n = T \circ T^{n-1}$.
- (a) Dizemos que T é nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n = 0$.

EXEMPLO

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dada por

$$T(x, y) = (0, x).$$

INVERSA

OBSERVAÇÃO

Sejam $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $I_U \in \mathcal{L}(U)$, $I_V \in \mathcal{L}(V)$ as identidades de U e V , respectivamente. Então

$$I_V \circ T = T \text{ e } T \circ I_U = T$$

INVERSA

OBSERVAÇÃO

Sejam $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $I_U \in \mathcal{L}(U)$, $I_V \in \mathcal{L}(V)$ as identidades de U e V , respectivamente. Então

$$I_V \circ T = T \text{ e } T \circ I_U = T$$

DEFINIÇÃO

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Dizemos que T é inversível se existe uma função $S : V \rightarrow U$ tal que

$$S \circ T = I_U \text{ e } T \circ S = I_V,$$

ou seja,

$$(S \circ T)(x) = x, \forall x \in U \text{ e } (T \circ S)(y) = y, \forall y \in V$$

INVERSA

TEOREMA

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então:

- (a) T possui inversa se, e somente se, é bijetiva.

INVERSA

TEOREMA

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então:

- (a) T possui inversa se, e somente se, é bijetiva.
- (b) A inversa de T , quando existe, é única e denotada por T^{-1} .

INVERSA

TEOREMA

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então:

- (a) T possui inversa se, e somente se, é bijetiva.
- (b) A inversa de T , quando existe, é única e denotada por T^{-1} .
- (b) Quando existe, $T^{-1} \in \mathcal{L}(V, U)$.

NÚCLEO E IMAGEM

DEFINIÇÃO

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. O núcleo e a imagem de T são os conjuntos

$$N(T) = \{x \in U; T(x) = 0\} \text{ e } Im(T) = \{y \in V; T(x) = y, \text{ para algum } x \in U\},$$

respectivamente.

NÚCLEO E IMAGEM

DEFINIÇÃO

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. O núcleo e a imagem de T são os conjuntos

$$N(T) = \{x \in U; T(x) = 0\} \text{ e } Im(T) = \{y \in V; T(x) = y, \text{ para algum } x \in U\},$$

respectivamente.

LEMA

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então,

- (a) $N(T)$ é um subespaço de U .

NÚCLEO E IMAGEM

DEFINIÇÃO

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. O núcleo e a imagem de T são os conjuntos

$$N(T) = \{x \in U; T(x) = 0\} \text{ e } Im(T) = \{y \in V; T(x) = y, \text{ para algum } x \in U\},$$

respectivamente.

LEMA

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então,

- (a) $N(T)$ é um subespaço de U .
- (b) $Im(T)$ é um subespaço de V .

NÚCLEO E IMAGEM

DEFINIÇÃO

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. O núcleo e a imagem de T são os conjuntos

$$N(T) = \{x \in U; T(x) = 0\} \text{ e } Im(T) = \{y \in V; T(x) = y, \text{ para algum } x \in U\},$$

respectivamente.

LEMA

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Então,

- (a) $N(T)$ é um subespaço de U .
- (b) $Im(T)$ é um subespaço de V .
- (c) T é injetiva se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Considere $\theta \in \mathbb{R}$ fixado e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta))$$

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Considere $\theta \in \mathbb{R}$ fixado e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta))$$

EXEMPLO 2

Considere $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ o operador derivada.