CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Transformação linear

Definição

Uma transformação linear entre dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais V e W é uma função $T : V \to W$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(1)\quad T(x+y) = T(x) + T(y),\ \forall x, y \in V.$$

$$(1)\quad T(\lambda x) = \lambda T(x),\ \forall x \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Denotamos por $\mathcal{L}(U, V)$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : U \to V$.

Proposição 1

$\mathcal{L}(U, V)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com respeito as operações usuais de soma e produto por escalar. Em particular, se $dim U = n$ e $dim V = m$, então $dim \mathcal{L}(U, V) = mn$.

Núcleo e Imagem

Definição

Seja $T \in \mathcal{L}(U,V)$. O núcleo e a imagem de T são os conjuntos

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in U;\ T(x) = 0\} \ \text{ e } \ Im(T) = \{y \in V;\ T(x) = y, \ \text{ para algum } x \in U\},$$

respectivamente.

Lema

Seja $T \in \mathcal{L}(U,V)$. Então,

(a) $\mathcal{N}(T)$ é um subespaço de U.

(b) $Im(T)$ é um subespaço de V.

(c) T é injetiva se, e somente se, $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

O teorema Núcleo-Imagem

Teorema (Núcleo-Imagem)

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$, com $dimU < \infty$. Então,

$$dimU = dim\,\mathcal{N}(T) + dim\,Im(T)$$

O teorema Núcleo-Imagem

Teorema (Núcleo-Imagem)

Seja $T \in \mathcal{L}(U,V)$, com $dim U < \infty$. Então,

$$dim U = dim\, \mathcal{N}(T) + dim\, Im(T)$$

Corolário

Seja $T \in \mathcal{L}(U,V)$, com $dim U = dim V < \infty$. Então, são equivalentes:

(a) T é sobrejetora.

(b) T é injetora.

(c) T é bijetora.

(d) T leva bases de U em bases de V.

Exemplos e aplicações

Exemplo 1

Toda transformação linear $T : U \to V$, com $dimV = 1$, é sobrejetora.

Exemplos e aplicações

Exemplo 1

Toda transformação linear $T : U \to V$, com $dimV = 1$, é sobrejetora.

Exemplo 2

Dados $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, então o subespaço

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n;\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0\}$$

tem dimensão $n - 1$.

Exemplos e aplicações

Exemplo 1

Toda transformação linear $T : U \to V$, com $dimV = 1$, é sobrejetora.

Exemplo 2

Dados $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, então o subespaço

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n;\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0\}$$

tem dimensão $n - 1$.

Exemplo 3

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por $TX = AX - XA$. Determine $\mathcal{N}(T)$ e $Im(T)$.

O espaço

Definição

Um isomorfismo entre espaços vetoriais U e V é uma transformação linear bijetiva $T : U \to V$. Neste caso, dizemos que U e V são isomorfos.

O espaço

Definição

Um isomorfismo entre espaços vetoriais U e V é uma transformação linear bijetiva $T : U \to V$. Neste caso, dizemos que U e V são isomorfos.

- A relação $U \sim V \doteq U$ e V *são isomorfos* é de equivalência.
- Um isomorfismo $T : U \to U$ é chamado de automorfismo.

O espaço

Definição

Um isomorfismo entre espaços vetoriais U e V é uma transformação linear bijetiva $T : U \to V$. Neste caso, dizemos que U e V são isomorfos.

- A relação $U \sim V \doteq U$ e V *são isomorfos* é de equivalência.
- Um isomorfismo $T : U \to U$ é chamado de automorfismo.

Exemplo 1

- $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ são isomorfos.

O espaço

Definição

Um isomorfismo entre espaços vetoriais U e V é uma transformação linear bijetiva $T : U \to V$. Neste caso, dizemos que U e V são isomorfos.

- A relação $U \sim V \doteq U$ e V *são isomorfos* é de equivalência.
- Um isomorfismo $T : U \to U$ é chamado de automorfismo.

Exemplo 1

- $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ são isomorfos.
- $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^{mn}$ são isomorfos.

O espaço

Definição

Um isomorfismo entre espaços vetoriais U e V é uma transformação linear bijetiva $T : U \to V$. Neste caso, dizemos que U e V são isomorfos.

- A relação $U \sim V \doteq U$ e V *são isomorfos* é de equivalência.
- Um isomorfismo $T : U \to U$ é chamado de automorfismo.

Exemplo 1

- $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ são isomorfos.
- $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^{mn}$ são isomorfos.

Exemplo 2

A função $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - y, x - z, z - y)$ não é um automorfismo.

Alguns resultados

Teorema 1

Seja $T : U \to V$ um ismorfismo. Então, U tem dimensão finita se, e somente se, o mesmo vale para V. Neste caso, $dim U = dim V$.

Alguns resultados

Teorema 1

Seja $T : U \to V$ um ismorfismo. Então, U tem dimensão finita se, e somente se, o mesmo vale para V. Neste caso, $dimU = dimV$.

Teorema 2

Sejam U e V espaços de dimensão finita, $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de U e V, respectivamente. Então, a transformação linear $T : U \to V$ definida por

$$T(u_j) = v_j, æ = 1, \ldots, n,$$

é um isomorfismo

Alguns resultados

Teorema 1

Seja $T : U \to V$ um ismorfismo. Então, U tem dimensão finita se, e somente se, o mesmo vale para V. Neste caso, $dimU = dimV$.

Teorema 2

Sejam U e V espaços de dimensão finita, $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de U e V, respectivamente. Então, a transformação linear $T : U \to V$ definida por

$$T(u_j) = v_j, æ = 1, \ldots, n,$$

é um isomorfismo

Corolário 1

Dois espaços de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, possuem a mesma dimensão.

Alguns resultados

Teorema 1

Seja $T : U \to V$ um ismorfismo. Então, U tem dimensão finita se, e somente se, o mesmo vale para V. Neste caso, $dimU = dimV$.

Teorema 2

Sejam U e V espaços de dimensão finita, $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de U e V, respectivamente. Então, a transformação linear $T : U \to V$ definida por

$$T(u_j) = v_j, æ = 1, \ldots, n,$$

é um isomorfismo

Corolário 1

Dois espaços de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, possuem a mesma dimensão.

Corolário 2

Se $dimU = n$ e $dimV = m$, então $\mathcal{L}(U, V)$ é isomorfo a $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$, logo isomorfo a $\mathbb{R}^{mn}$.