CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Transformação linear

Definição

Uma transformação linear entre dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais V e W é uma função $T : V \to W$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $T(x+y) = T(x) + T(y), \ \forall x, y \in V.$

(1) $T(\lambda x) = \lambda T(x), \ \forall x \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$

Definição

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$. O núcleo e a imagem de T são os conjuntos

$$N(T) = \{x \in U; \ T(x) = 0\} \ \text{ e } \ Im(T) = \{y \in V; \ T(x) = y, \ \text{ para algum } x \in U\},$$

respectivamente.

O ESPAÇO $\mathcal{L}(U, V)$

Definição

Dados dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais U e V iremos denotar por $\mathcal{L}(U, V)$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : U \to V$.

Proposição 1

$\mathcal{L}(U, V)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com respeito as operações usuais de soma e produto por escalar.

Proposição 2

Se $dim U = n$ e $dim V = m$, então $dim \mathcal{L}(U, V) = mn$.

Núcleo e Imagem

Teorema (Núcleo-Imagem)

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$, com $dim U < \infty$. Então, $dim U = dim \mathcal{N}(T) + dim\, Im(T)$.

Corolário 1

Seja $T \in \mathcal{L}(U, V)$, com $dim U = dim V < \infty$. Então, são equivalentes:

(a) T é sobrejetora.

(b) T é injetora.

(c) T é bijetora.

(d) T leva bases de U em bases de V.

Isomorfismo

Definição

Um isomorfismo entre espaços vetoriais U e V é uma transformação linear bijetiva $T : U \to V$. Neste caso, dizemos que U e V são isomorfos.

Teorema

Sejam U e V espaços de dimensão finita, $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de U e V, respectivamente. Então, a transformação linear $T : U \to V$ definida por

$$T(u_j) = v_j,\ j = 1, \ldots, n,$$

é um isomorfismo

Corolário

(a) Dois espaços de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, possuem a mesma dimensão.

(b) Se $dim U = n$ e $dim V = m$, então $\mathcal{L}(U, V)$ é isomorfo a $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$, logo isomorfo a $\mathbb{R}^{mn}$.

Matrizes de Transformações Lineares

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e

$$\beta = \{u_1, \ldots, u_n\} \text{ e } \gamma = \{v_1, \ldots, v_m\}$$

bases de U e V, respectivamente. Dada $\mathcal{L}(U, V)$, podemos escrever

$$\begin{cases} T(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{m1}v_m \\ \vdots \\ T(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \ldots + a_{mj}v_m \\ \vdots \\ T(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{nn}v_m \end{cases}$$

Matrizes de Transformações Lineares

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e

$$\beta = \{u_1, \ldots, u_n\} \text{ e } \gamma = \{v_1, \ldots, v_m\}$$

bases de U e V, respectivamente. Dada $\mathcal{L}(U, V)$, podemos escrever

$$\begin{cases} T(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{m1}v_m \\ \vdots \\ T(u_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \ldots + a_{mj}v_m \\ \vdots \\ T(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{nn}v_m \end{cases}$$

Neste caso, a matriz

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e chamada de matriz da transformação T com relação as bases β e γ.

Matrizes de Transformações Lineares

Teorema

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita n e m com bases β e γ, respectivamente e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Dado $u \in U$ considere

$$u_\beta \in \mathbb{K}^n \text{ e } (Tu)_\gamma \in \mathbb{K}^m,$$

as coordenadas de u e Tu nas respectivas bases. Então,

$$(Tu)_\gamma = [T]_\beta^\gamma \cdot u_\beta$$

Exemplos

Exemplo 1

A matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x, x+y, x)$, com respeito as bases canônicas, é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos

Exemplo 1

A matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x, x + y, x)$, com respeito as bases canônicas, é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

A matriz da transformação linear $T : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_2$, $Tp = p'$, com respeito as bases canônicas, é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Teorema 1

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita com bases β e γ, respectivamente. Dadas $T, S \in \mathcal{L}(U, V)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, tem-se

$$[\lambda T + \mu S]_\beta^\gamma = \lambda [T]_\beta^\gamma + \mu [S]_\beta^\gamma$$

Propriedades

Teorema 1

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita com bases β e γ, respectivamente. Dadas $T, S \in \mathcal{L}(U, V)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, tem-se

$$[\lambda T + \mu S]_\beta^\gamma = \lambda[T]_\beta^\gamma + \mu[S]_\beta^\gamma$$

Corolário 1

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita com bases β e γ, respectivamente. Então, a aplicação $\varphi : \mathcal{L}(U, V) \to \mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$ definida por

$$\varphi(T) = [T]_\beta^\gamma$$

é um isomorfismo.

Propriedades

Teorema 2

Sejam U, V e W dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita com bases β, γ e η, respectivamente. Dadas $T \in \mathcal{L}(U,V)$ e $S \in \mathcal{L}(V,W)$ tem-se

$$[S \circ T]_{\beta}^{\eta} = [S]_{\gamma}^{\eta} \cdot [T]_{\beta}^{\gamma}$$

Propriedades

Teorema 2

Sejam U, V e W dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita com bases β, γ e η, respectivamente. Dadas $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$ tem-se

$$[S \circ T]_\beta^\eta = [S]_\gamma^\eta \cdot [T]_\beta^\gamma$$

Corolário 1

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita com bases β e γ. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é inversível, então

$$[T^{-1}]_\gamma^\beta = ([T]_\beta^\gamma)^{-1}.$$

Exemplos

Exemplo 1

A matriz da transformação linear $T : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$, $Tp = p'$. Pergunta: T possui inversa?

Exemplos

Exemplo 1

A matriz da transformação linear $T : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$, $Tp = p'$. Pergunta: T possui inversa?

Exemplo 2

A matriz da transformação linear $T : \mathscr{P}_2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$Tp = \int_0^1 p(x)dx.$$

Então, com respeito as bases canônicas de $\mathscr{P}_2$ e $\mathbb{R}$, temos

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$