CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Transformação linear

Definição

Uma transformação linear entre dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais V e W é uma função $T : V \to W$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $T(x+y) = T(x) + T(y),\ \forall x, y \in V.$

(1) $T(\lambda x) = \lambda T(x),\ \forall x \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}.$

Definição

Dados dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais U e V iremos denotar por $\mathcal{L}(U, V)$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : U \to V$.

Matrizes de Transformações Lineares

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e

$$A = \{u_1, \ldots, u_n\} \text{ e } B = \{v_1, \ldots, v_m\}$$

bases de U e V, respectivamente. Dada $\mathcal{L}(U, V)$, podemos escrever

$$\begin{cases} T(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{m1}v_m \\ \vdots \\ T(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{mn}v_m \end{cases}$$

- A matriz

$$[T]_A^B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

  e chamada de matriz da transformação T com relação as bases A e B.
- Quando for $T \in \mathcal{L}(U)$ e A uma base de U iremos escrever

$$[T]_A = [T]_{A,A}.$$

Teorema 1

Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita n e m com bases A e B, respectivamente e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Dado $u \in U$ considere

$$u_A \in \mathbb{K}^n \text{ e } (Tu)_B \in \mathbb{K}^m,$$

as coordenadas de u e Tu nas respectivas bases. Então,

$$(Tu)_B = [T]_A^B \cdot u_A$$

Teorema 2

Sejam U, V e W dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita com bases A, B e C, respectivamente. Dadas $T \in \mathcal{L}(U,V)$ e $S \in \mathcal{L}(V,W)$ tem-se

$$[S \circ T]_A^C = [S]_B^C \cdot [T]_A^B.$$

Teorema 3

Sejam U um espaço de dimensão finita, A e B duas bases e $T \in \mathcal{L}(U)$. Existe uma matriz invertível S tal que

$$[T]_A = S^{-1} \cdot [T]_B \cdot S.$$

Proposição 1

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço de dimensão finita com bases A e $k \in \mathbb{N}$. Então, dado $T \in \mathcal{L}(U)$ tem-se

$$[T^k]_A = [T]_A^k.$$

Exemplo

Calcular potências da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x+2y, 2x+y)$.

1. Utilizando a base canônica $A = \{u_1 = (1,0),\ u_2 = (0,1)\}$.
2. Utilizando a base $B = \{v_1 = (1,-1),\ v_2 = (1,1)\}$.

Autovalor e autovetor de transformações lineares

Definição 1

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(U)$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se existe $u \in U \setminus \{0\}$ tal que

$$Tu = \lambda u.$$

Neste caso, dizemos que u é um autovetor associado a λ.

Autovalor e autovetor de transformações lineares

Definição 1

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(U)$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se existe $u \in U \setminus \{0\}$ tal que

$$Tu = \lambda u.$$

Neste caso, dizemos que u é um autovetor associado a λ.

Observação

- Se u é um autovetor associado a λ, então todo múltiplo não nulo de u é também um autovetor associado a λ. Em particular, um vetor não pode estar associado a dois autovalores distintos.

Autovalor e autovetor de transformações lineares

Definição 1

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(U)$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se existe $u \in U \setminus \{0\}$ tal que

$$Tu = \lambda u.$$

Neste caso, dizemos que u é um autovetor associado a λ.

Observação

- Se u é um autovetor associado a λ, então todo múltiplo não nulo de u é também um autovetor associado a λ. Em particular, um vetor não pode estar associado a dois autovalores distintos.
- Denotaremos por por V_λ o espaço gerado por todos os autovetores de T associados ao autovalor λ.

Autovalor e autovetor de transformações lineares

Definição 1

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(U)$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se existe $u \in U \setminus \{0\}$ tal que

$$Tu = \lambda u.$$

Neste caso, dizemos que u é um autovetor associado a λ.

Observação

- Se u é um autovetor associado a λ, então todo múltiplo não nulo de u é também um autovetor associado a λ. Em particular, um vetor não pode estar associado a dois autovalores distintos.
- Denotaremos por por V_λ o espaço gerado por todos os autovetores de T associados ao autovalor λ.

Teorema 4

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Fixada uma base A de U, então $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se, $det([T]_A - \lambda I) = 0$. Em particular, λ não depende da base A.

Exemplos

Exemplo 1

Os autovalores da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$ são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ e os autovetores associados podem ser escolhidos como $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$, respectivamente.

Exemplos

Exemplo 1

Os autovalores da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$ são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ e os autovetores associados podem ser escolhidos como $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$, respectivamente.

Exemplo 2

O único autovalor de $T : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$ é $\lambda = 0$, e os autovetores são os polinômios constantes.

Exemplos

Exemplo 1

Os autovalores da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$ são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ e os autovetores associados podem ser escolhidos como $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$, respectivamente.

Exemplo 2

O único autovalor de $T : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$ é $\lambda = 0$, e os autovetores são os polinômios constantes.

Exemplo 3

A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, -x)$ não possui autovalores.

Exemplos

Exemplo 1

Os autovalores da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$ são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ e os autovetores associados podem ser escolhidos como $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$, respectivamente.

Exemplo 2

O único autovalor de $T : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$ é $\lambda = 0$, e os autovetores são os polinômios constantes.

Exemplo 3

A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, -x)$ não possui autovalores.

Exemplo 4

Os autovalores da transformação linear $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dada por $T(x, y) = (y, -x)$ são i e $-i$.

Autovalor e autovetor de matrizes

Definição

Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ se existe $u \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$Au = \lambda u.$$

Neste caso, dizemos que u é um autovetor associado ao autovalor λ. Denotamos por V_λ o espaço gerado pelos autovetores associados ao autovalor λ.

Autovalor e autovetor de matrizes

Definição

Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ se existe $u \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$Au = \lambda u.$$

Neste caso, dizemos que u é um autovetor associado ao autovalor λ. Denotamos por V_λ o espaço gerado pelos autovetores associados ao autovalor λ.

Proposição 1

Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de A.

(b) A matriz $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ é singular.

(c) λ é raiz do polinômio característico de A: $P_A(x) = \det(A - xI)$

Observação

Note que o polinômio característico de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ possui grau n. Assim, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então toda matriz possui n autovalores (contando as multiplicidades).

Exemplo

Os autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

São $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Os respectivos autoespaços são

$$V_{\lambda_1} = ger[(0,0,1)] \text{ e } V_{\lambda_2 = \lambda_3} = ger[(0,1,0),(0,0,1)]$$

Propriedades

Definição

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. O polinômio característico de T é o polinômio

$$p_T(x) = det([T]_\beta - xI),$$

sendo β uma base qualquer de U.

Propriedades

Definição

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. O polinômio característico de T é o polinômio

$$p_T(x) = det([T]_\beta - xI),$$

sendo β uma base qualquer de U.

Teorema

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Então, $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se, $p_T(\lambda) = 0$.