

CMM 031

Álgebra Linear

S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR



AUTOVALOR E AUTOVETOR DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

DEFINIÇÃO 1

Sejam U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(U)$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se existe $u \in U \setminus \{0\}$ tal que

$$Tu = \lambda u.$$

Neste caso, dizemos que u é um autovetor associado a λ .

OBSERVAÇÃO

- Se u é um autovetor associado a λ , então todo múltiplo não nulo de u é também um autovetor associado a λ .
- Um vetor não pode estar associado a dois autovalores distintos.
- Denotaremos por V_λ o espaço gerado por todos os autovetores de T associados ao autovalor λ .

TEOREMA 1

Sejam U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Fixada uma base A de U , então $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se, $\det([T]_A - \lambda I) = 0$. Em particular, λ não depende da base A .

DEFINIÇÃO

Sejam U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. O polinômio característico de T é o polinômio

$$p_T(x) = \det([T]_\beta - xI),$$

sendo β uma base qualquer de U .

TEOREMA 2

Sejam U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Então, $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se, $p_T(\lambda) = 0$.

OBSERVAÇÃO

Se $\dim U = n$, então o polinômio característico de $T \in \mathcal{L}(U)$ possui grau n . Assim, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, vão existir n autovalores (contando as multiplicidades).

UM CASO PARTICULAR: AUTOVALOR E AUTOVETOR DE MATRIZES

DEFINIÇÃO

Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ se existe $u \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$Au = \lambda u.$$

Neste caso, dizemos que u é um autovetor associado ao autovalor λ . Denotamos por V_λ o espaço gerado pelos autovetores associados ao autovalor λ .

PROPOSIÇÃO 1

Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de A .
- (b) A matriz $A - \lambda I$ é singular.
- (c) λ é raiz do polinômio característico de A : $P_A(x) = \det(A - xI)$

EXEMPLOS

EXEMPLO 1

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$[T]_A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Os autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.
- Os autoespaços são $V_{\lambda_1} = \text{ger}[(1, -2, -3)]$ e $V_{\lambda_2} = \text{ger}[(0, -1, 2)]$.

EXEMPLOS

EXEMPLO 2

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$[T]_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

- Os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$.
- Os autoespaços são $V_{\lambda_1} = \text{ger}[(1, 0, 2), (0, 1, 2)]$ e $V_{\lambda_3} = \text{ger}[(1, -1, 1)]$.

TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

TEOREMA

Sejam U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(U)$ e $P_T(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ seu polinômio característico. Então, pondo $M = [T]_A$, temos

$$P_T(M) = a_n M^n + \dots + a_1 M + a_0 I = 0$$

TEOREMA 3

Sejam U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Suponha que T possua autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ com autovetores associados $v_1, \dots, v_n$, respectivamente. Se

$$\lambda_k \neq \lambda_j, j \neq k,$$

então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é um conjunto linearmente independente.

TEOREMA 3

Sejam U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Suponha que T possua autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ com autovetores associados $v_1, \dots, v_n$, respectivamente. Se

$$\lambda_k \neq \lambda_j, j \neq k,$$

então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é um conjunto linearmente independente.

COROLÁRIO 1

Nas condições do teorema, se β_k é um conjunto linearmente independente de V_{λ_k} , então o conjunto

$$\beta = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_n$$

é linearmente independente.

TEOREMA 3

Sejam U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Suponha que T possua autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ com autovetores associados $v_1, \dots, v_n$, respectivamente. Se

$$\lambda_k \neq \lambda_j, j \neq k,$$

então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é um conjunto linearmente independente.

COROLÁRIO 1

Nas condições do teorema, se β_k é um conjunto linearmente independente de V_{λ_k} , então o conjunto

$$\beta = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_n$$

é linearmente independente.

COROLÁRIO 2

Sejam U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Suponha que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sejam todos os autovalores de T . Então, existe uma base de U formada por autovetores de T se, e somente se,

$$\dim V = \sum_{j=1}^n \dim V_{\lambda_j}.$$

MULTIPLICIDADES ALGÉBRICAS E GEOMÉTRICAS

DEFINIÇÃO

Sejam U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(U)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor de T .

- a multiplicidade algébrica de λ , denotada por $m_a(\lambda)$, é a sua multiplicidade como raiz de $P_T(x)$.
- a multiplicidade geométrica de λ , denotada por $m_g(\lambda)$, é a dimensão de V_λ .

MULTIPLICIDADES ALGÉBRICAS E GEOMÉTRICAS

DEFINIÇÃO

Sejam U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(U)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor de T .

- a multiplicidade algébrica de λ , denotada por $m_a(\lambda)$, é a sua multiplicidade como raiz de $P_T(x)$.
- a multiplicidade geométrica de λ , denotada por $m_g(\lambda)$, é a dimensão de V_λ .

TEOREMA

Sejam U um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(U)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor de T .
Nestas condições,

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda).$$

EM DIMENSÃO INFINITA...

EXEMPLO 1

Considere U o espaço vetorial formado pelas funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e $T : U \rightarrow U$ com $U \ni f \mapsto Tf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Neste caso, T não possui autovalores.

EM DIMENSÃO INFINITA...

EXEMPLO 1

Considere U o espaço vetorial formado pelas funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e $T : U \rightarrow U$ com $U \ni f \mapsto Tf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Neste caso, T não possui autovalores.

EXEMPLO 2

Considere U o espaço vetorial formado pelas funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis, tais que $f(0) = f(1) = 0$. Neste caso, resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(t) - \lambda y(t) = 0, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

é procurar os os autovalores de $T : U \rightarrow U$ dada por $Tf = f''$. Em particular, temos

$$f_n(x) = \sin(n\pi x) \text{ e } \lambda_n = n^2\pi^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$