CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Autovalor e autovetor de transformações lineares

Definição 1

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(U)$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se existe $u \in U \setminus \{0\}$ tal que

$$Tu = \lambda u.$$

Neste caso, dizemos que u é um autovetor associado a λ.

Observação

- Se u é um autovetor associado a λ, então todo múltiplo não nulo de u é também um autovetor associado a λ.
- Um vetor não pode estar associado a dois autovalores distintos.
- Denotaremos por V_λ o espaço gerado por todos os autovetores de T associados ao autovalor λ.

Teorema 1

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Fixada uma base A de U, então $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se, $det([T]_A - \lambda I) = 0$. Em particular, λ não depende da base A.

Definição

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. O polinômio característico de T é o polinômio

$$p_T(x) = det([T]_\beta - xI),$$

sendo β uma base qualquer de U.

Teorema 2

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Então, $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se, $p_T(\lambda) = 0$.

Multiplicidades algébricas e geométricas

Definição

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(U)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor de T.

- a multiplicidade algébrica de λ, denotada por $m_a(\lambda)$, é a sua multiplicidade como raiz de $P_T(x)$.
- a multiplicidade geométrica de de λ, denotada por $m_g(\lambda)$, é a dimensão de V_λ.

Teorema 1

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(U)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ um autovalor de T. Nestas condições,

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda).$$

Diagolanização

Definição

Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Dizemos que $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável se existe uma base β de U formada por autovetores de T.

Diagolanização

Definição

Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Dizemos que $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável se existe uma base β de U formada por autovetores de T.

Exemplo 1

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (y, 4x)$ é diagonalizável.

Diagolanização

Definição

Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Dizemos que $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável se existe uma base β de U formada por autovetores de T.

Exemplo 1

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (y, 4x)$ é diagonalizável.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (-y, x)$ não é diagonalizável.

DIAGOLANIZAÇÃO

DEFINIÇÃO

Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Dizemos que $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável se existe uma base β de U formada por autovetores de T.

EXEMPLO 1

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (y, 4x)$ é diagonalizável.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (-y, x)$ não é diagonalizável.

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x, y) = (y, x)$ não é diagonalizável.

Teorema 2

Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então, $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base β de U na qual $[T]_\beta$ é diagonal

Teorema 2

Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então, $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base β de U na qual $[T]_\beta$ é diagonal

Observação

Suponha T é diagonalizável e que $[T]_\beta$ é diagonal. Então, dada outra base α qualquer de U sabemos que existe uma matriz invertível S tal que

$$[T]_\alpha = S \cdot [T]_\beta \cdot S^{-1}.$$

Teorema 2

Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então, $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base β de U na qual $[T]_\beta$ é diagonal

Observação

Suponha T é diagonalizável e que $[T]_\beta$ é diagonal. Então, dada outra base α qualquer de U sabemos que existe uma matriz invertível S tal que

$$[T]_\alpha = S \cdot [T]_\beta \cdot S^{-1}.$$

Definição

Dizemos que uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é diagonalizável se existe uma matriz invertível $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$S \cdot A \cdot S^{-1}$$

é diagonal.

Teorema 2

Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então, $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base β de U na qual $[T]_\beta$ é diagonal

Observação

Suponha T é diagonalizável e que $[T]_\beta$ é diagonal. Então, dada outra base α qualquer de U sabemos que existe uma matriz invertível S tal que

$$[T]_\alpha = S \cdot [T]_\beta \cdot S^{-1}.$$

Definição

Dizemos que uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é diagonalizável se existe uma matriz invertível $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$S \cdot A \cdot S^{-1}$$

é diagonal.

Teorema 3

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e α uma base de U. Então, $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável se, e somente se, $[T]_\alpha$ é uma matriz diagonalizável.

OBSERVAÇÃO

Note então que para verificar se uma transformação linear é diagonalizável basta mostrar que a matriz de T, com com respeito a qualquer base de U, é diagonalizável.

Observação

Note então que para verificar se uma transformação linear é diagonalizável basta mostrar que a matriz de T, com com respeito a qualquer base de U, é diagonalizável.

Exemplo

A transformação linear $T : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$, dada por $Tp = p'$, não é diagonalizável. De fato, com respeito a base canônica $\alpha = \{1, x, x^2\}$ de $\mathscr{P}_2$ temos

$$[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a qual não é diagonalizável.

Observação

Suponha $A_{n\times n}$ uma matriz diagonalizável. Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{K}^n$ formada de autovetores de A, então definindo

$$S = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_j & \dots & v_n \end{bmatrix},$$

temos que

$$[T]_\beta = S^{-1} \cdot A \cdot S.$$

Observação

Suponha $A_{n\times n}$ uma matriz diagonalizável. Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{K}^n$ formada de autovetores de A, então definindo

$$S = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_j & \ldots & v_n \end{bmatrix},$$

temos que

$$[T]_\beta = S^{-1} \cdot A \cdot S.$$

Exemplo 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Observação

Suponha $A_{n\times n}$ uma matriz diagonalizável. Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{K}^n$ formada de autovetores de A, então definindo

$$S = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_j & \ldots & v_n \end{bmatrix},$$

temos que

$$[T]_\beta = S^{-1} \cdot A \cdot S.$$

Exemplo 1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } S^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Auto espaços

Teorema 1

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Então, T é diagonalizável se, e somente se

$$U = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_n},$$

sendo $n \leq dim(U)$.

Auto espaços

Teorema 1

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Então, T é diagonalizável se, e somente se

$$U = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_n},$$

sendo $n \leq dim(U)$.

Teorema 2

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Então, T é diagonalizável se, e somente se, valem as seguintes condições:

(a) para cada autovalor de T as suas multiplicidades algébrica e geométrica são iguais.

(b) a soma das multiplicidades geométricas de todos os autovalores de T coincide com a dimensão de U.

AUTO ESPAÇOS

TEOREMA 1

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Então, T é diagonalizável se, e somente se

$$U = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_n},$$

sendo $n \leq dim(U)$.

TEOREMA 2

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Então, T é diagonalizável se, e somente se, valem as seguintes condições:

(a) para cada autovalor de T as suas multiplicidades algébrica e geométrica são iguais.

(b) a soma das multiplicidades geométricas de todos os autovalores de T coincide com a dimensão de U.

COROLÁRIO 1

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Se todos os autovalores de T são dois a dois distintos, então T é diagonalizável.

Exemplos

Exemplo 1

A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$ é diagonalizável.

Exemplos

Exemplo 1

A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$ é diagonalizável.

Exemplo 2

A transformação linear $T : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$, dada por

$$T(y) = y'' - 2y' + y$$

não é diagonalizável.