CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Definição

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. O polinômio característico de T é o polinômio

$$p_T(x) = det([T]_\beta - xI),$$

sendo β uma base qualquer de U.

Teorema 2

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(U)$. Então, $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se, $p_T(\lambda) = 0$.

Teorema 2

Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então, $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base β de U na qual $[T]_\beta$ é diagonal

Teorema 2

Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então, $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base β de U na qual $[T]_\beta$ é diagonal

Observação

Suponha T é diagonalizável e que $[T]_\beta$ é diagonal. Então, dada outra base α qualquer de U sabemos que existe uma matriz invertível S tal que

$$[T]_\alpha = S \cdot [T]_\beta \cdot S^{-1}.$$

Teorema 2

Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então, $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base β de U na qual $[T]_\beta$ é diagonal

Observação

Suponha T é diagonalizável e que $[T]_\beta$ é diagonal. Então, dada outra base α qualquer de U sabemos que existe uma matriz invertível S tal que

$$[T]_\alpha = S \cdot [T]_\beta \cdot S^{-1}.$$

Definição

Dizemos que uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é diagonalizável se existe uma matriz invertível $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$S \cdot A \cdot S^{-1}$$

é diagonal.

Teorema 2

Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então, $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base β de U na qual $[T]_\beta$ é diagonal

Observação

Suponha T é diagonalizável e que $[T]_\beta$ é diagonal. Então, dada outra base α qualquer de U sabemos que existe uma matriz invertível S tal que

$$[T]_\alpha = S \cdot [T]_\beta \cdot S^{-1}.$$

Definição

Dizemos que uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é diagonalizável se existe uma matriz invertível $S \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$S \cdot A \cdot S^{-1}$$

é diagonal.

Teorema 3

Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e α uma base de U. Então, $T \in \mathcal{L}(U)$ é diagonalizável se, e somente se, $[T]_\alpha$ é uma matriz diagonalizável.

Observação

Suponha $A_{n\times n}$ uma matriz diagonalizável. Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{K}^n$ formada de autovetores de A, então definindo

$$S = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_j & \ldots & v_n \end{bmatrix},$$

temos que

$$[T]_\beta = S^{-1} \cdot A \cdot S,$$

ou equivalentemente

$$A = S \cdot [T]_\beta \cdot S^{-1}.$$

Exemplos

Exemplo 1

A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$ é diagonalizável.

Exemplos

Exemplo 1

A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z)$ é diagonalizável.

Exemplo 2

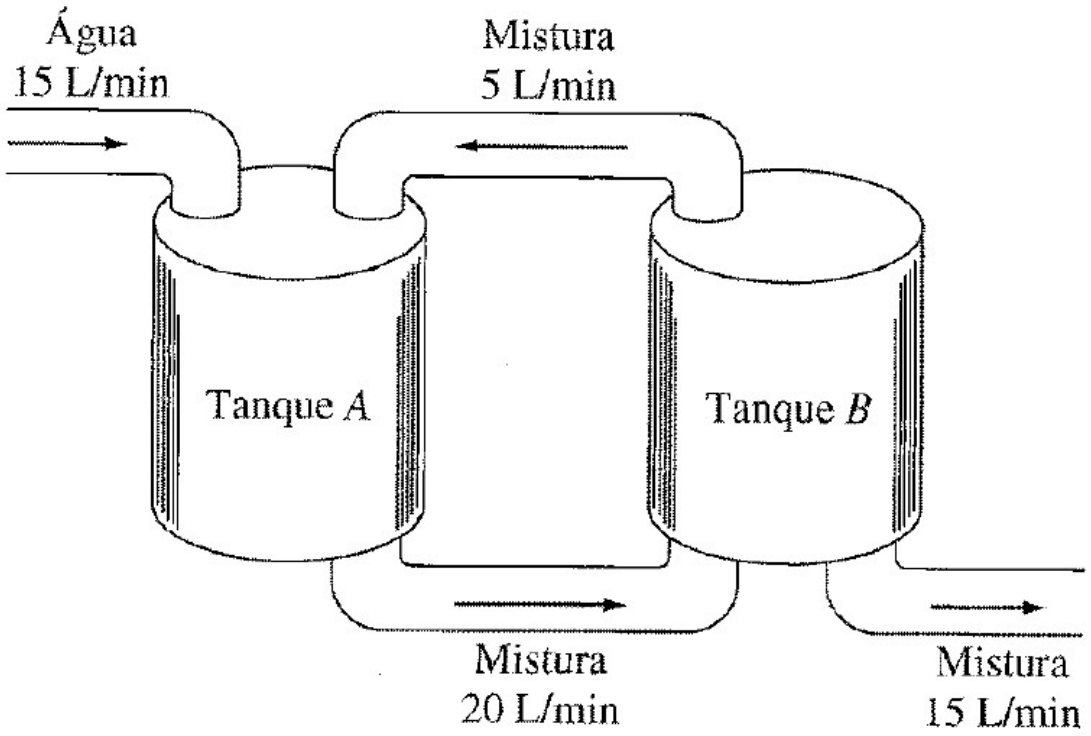
A transformação linear $T : \mathscr{P}_2 \to \mathscr{P}_2$, dada por

$$T(y) = y'' - 2y' + y$$

não é diagonalizável.

Exemplo prático

Dois tanques são conectados como na figura abaixo. Inicialmente, o tanque A contém 200 litros de água na qual foram dissolvidos 60 gramas de sal e o tanque B contém 200 litros de água pura. O líquido é bombeado para dentro e para fora dos tanques nas taxas indicadas. Determine a quantidade de sal em casa tanque no tempo t.



Modelando o problema

Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ a quantidade, em gramas, de sal em A e B, respetivamente.

- No tanque A, a taxa na qual o sal está sendo adicionado:

$$(5L/min) \cdot \left(\frac{y_2(t)}{200} g/L \right) = \frac{y_2(t)}{40} g/min$$

Modelando o problema

Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ a quantidade, em gramas, de sal em A e B, respetivamente.

- No tanque A, a taxa na qual o sal está sendo adicionado:

$$(5L/min) \cdot \left(\frac{y_2(t)}{200} g/L \right) = \frac{y_2(t)}{40} g/min$$

- No tanque A, a taxa na qual o sal está sainda:

$$(20L/min) \cdot \left(\frac{y_1(t)}{200} g/L \right) = \frac{y_1(t)}{10} g/min$$

Modelando o problema

Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ a quantidade, em gramas, de sal em A e B, respetivamente.

- No tanque A, a taxa na qual o sal está sendo adicionado:

$$(5L/min) \cdot \left(\frac{y_2(t)}{200} g/L \right) = \frac{y_2(t)}{40} g/min$$

- No tanque A, a taxa na qual o sal está sainda:

$$(20L/min) \cdot \left(\frac{y_1(t)}{200} g/L \right) = \frac{y_1(t)}{10} g/min$$

- Logo, a taxa de variação no tanque A é determinada por

$$y_1'(t) = \frac{y_2(t)}{40} - \frac{y_1(t)}{10}$$

Modelando o problema

Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ a quantidade, em gramas, de sal em A e B, respetivamente.

- No tanque A, a taxa na qual o sal está sendo adicionado:

$$(5L/min) \cdot \left(\frac{y_2(t)}{200} g/L \right) = \frac{y_2(t)}{40} g/min$$

- No tanque A, a taxa na qual o sal está sainda:

$$(20L/min) \cdot \left(\frac{y_1(t)}{200} g/L \right) = \frac{y_1(t)}{10} g/min$$

- Logo, a taxa de variação no tanque A é determinada por

$$y_1'(t) = \frac{y_2(t)}{40} - \frac{y_1(t)}{10}$$

- De modo análogo, a taxa de variação no tanque B é determinada por

$$y_2'(t) = \frac{y_1(t)}{10} - \frac{y_2(t)}{10}$$

O Sistema envolvido

Portanto, devemos resolver o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} y_1'(t) = -\frac{1}{10}y_1(t) + \frac{1}{40}y_2(t \\ y_2'(t) = \frac{1}{10}y_1(t) - \frac{1}{10}y_2(t). \end{cases}$$

Sistemas de equações diferenciais

Definição

Sejam $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ número reais fixados. Temos então o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \ldots + a_{1n}y_n(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \ldots + a_{1n}y_n(t), \end{cases}$$

no qual é procurada uma família de funções $y_1, \ldots, y_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Em particular, note que temos de modo equivalente

$$Y'(t) = A \cdot Y(t),$$

sendo $A = (a_{ij})$, $Y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ e $Y'(t) = (y_1'(t), \ldots, y_n'(t))$.

Sistemas de equações diferenciais

Definição

Sejam $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ número reais fixados. Temos então o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \ldots + a_{1n}y_n(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \ldots + a_{1n}y_n(t), \end{cases}$$

no qual é procurada uma família de funções $y_1, \ldots, y_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Em particular, note que temos de modo equivalente

$$Y'(t) = A \cdot Y(t),$$

sendo $A = (a_{ij})$, $Y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ e $Y'(t) = (y_1'(t), \ldots, y_n'(t))$.

Problema de valor inicial

$$P.V.I \begin{cases} Y'(t) = A \cdot Y(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

Existência de soluções

Teorema de existência e unicidade das soluções

O problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = A \cdot Y(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

possui uma única solução $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Existência de soluções

Teorema de existência e unicidade das soluções

O problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = A \cdot Y(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

possui uma única solução $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposição 1

O conjunto das soluções de $Y'(t) = A \cdot Y(t)$ é um subespaço do espaço vetorial das funções $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Existência de soluções

Teorema de existência e unicidade das soluções

O problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = A \cdot Y(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

possui uma única solução $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposição 1

O conjunto das soluções de $Y'(t) = A \cdot Y(t)$ é um subespaço do espaço vetorial das funções $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Proposição 2

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de A e v um autovetor associado, então

$$Y(t) = e^{\lambda t} v, \ t \in \mathbb{R},$$

é uma solução do problema

$$\begin{cases} Y'(t) = A \cdot Y(t) \\ Y(0) = v \end{cases}$$

Sistemas de equações diferenciais

Proposição 3

Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ são autovalores de A e $v_1, \ldots, v_k$ autovetores associados, respectivamente, então

$$Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \ldots + c_k e^{\lambda_k t} v_k, \; t \in \mathbb{R},$$

é uma solução do problema

$$\begin{cases} Y'(t) = A \cdot Y(t) \\ Y(0) = c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k. \end{cases}$$

Exemplos

Exemplo 1

Resolver o sistema

$$\begin{cases} y_1'(t) = 3y_1(t) + 4y_2(t) \\ y_2'(t) = 3y_1(t) + 2y_2(t). \end{cases}$$

Exemplos

Exemplo 1

Resolver o sistema

$$\begin{cases} y_1'(t) = 3y_1(t) + 4y_2(t) \\ y_2'(t) = 3y_1(t) + 2y_2(t). \end{cases}$$

Exemplo 2

Para o sistema do problema dos tanques:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -\frac{1}{10}y_1(t) + \frac{1}{40}y_2(t \\ y_2'(t) = \frac{1}{10}y_1(t) - \frac{1}{10}y_2(t). \end{cases}$$

- Neste caso, os autovalores são $\lambda_1 = -3/20$ e $\lambda_2 = -1/20$.
- Como autovetores, podemos tomar $v_1 = (1, -2)$ e $v_1 = (1, 2)$.

Exponencial de matrizes

Definição

Dada uma matriz real $A_{n\times n}$ definimos

$$e^A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Exponencial de matrizes

Definição

Dada uma matriz real $A_{n\times n}$ definimos

$$e^A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Observação

(a) A série acima é convergente, ou seja, $e^A \in \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$.

(b) $e^0 = I$.

Exemplo

Proposição 1

Se D é uma matriz diagonal, digamos

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0\dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0\dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ então } e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0\dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2}\dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0\dots & e^{\lambda_n}. \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Proposição 1

Se D é uma matriz diagonal, digamos

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0\dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0\dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ então } e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0\dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2}\dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0\dots & e^{\lambda_n}. \end{bmatrix}.$$

Proposição 2

Se A é uma matriz diagonalizável, digamos

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1}, \text{ então } e^A = S \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0\dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2}\dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0\dots & e^{\lambda_n}. \end{bmatrix} \cdot S^{-1}.$$

Aplicação

Proposição 3

Dados $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $u \in \mathbb{R}^n$, a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

é infinitamente diferenciável e vale

$$F'(t) = Ae^{At}.$$

Aplicação

Proposição 3

Dados $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $u \in \mathbb{R}^n$, a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

é infinitamente diferenciável e vale

$$F'(t) = Ae^{At}.$$

Proposição 4

A função $Y(t) = e^{At} Y_0$ é a solução do problema

$$\begin{cases} Y'(t) = A \cdot Y(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

Exemplos

- Para o problema dos tanques, temos

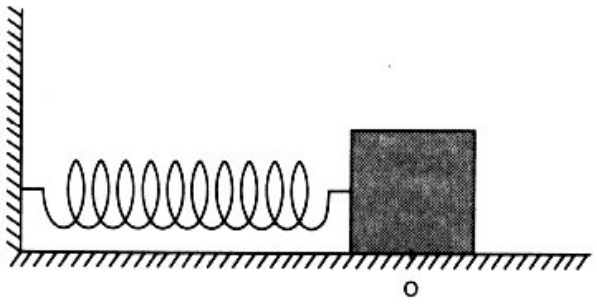
$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{20} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{40}{3} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{40}{3} & -\frac{40}{3} \end{pmatrix}$$

- Desta forma, temos

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-\frac{3t}{20}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{20}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{40}{3} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{40}{3} & -\frac{40}{3} \end{pmatrix}$$

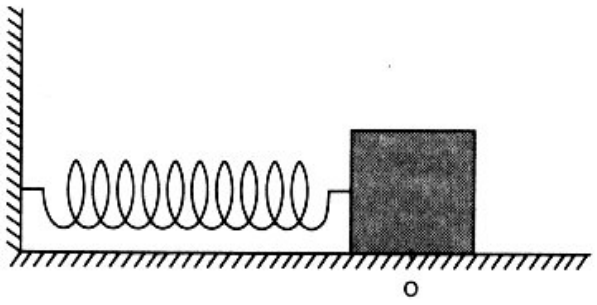
O Oscilador Harmônico

- Considere uma mola (massa desprezível) onde está presa uma partícula de massa $m > 0$ em uma de suas extremidades e a outra é fixada numa parede. Suponha que em repouso a partícula permaneça sobre a origem e uma vez que entre em movimento ela se desloca de forma retilínea sobre uma superfície plana e horizontal, como indica a figura abaixo.



O Oscilador Harmônico

- Considere uma mola (massa desprezível) onde está presa uma partícula de massa $m > 0$ em uma de suas extremidades e a outra é fixada numa parede. Suponha que em repouso a partícula permaneça sobre a origem e uma vez que entre em movimento ela se desloca de forma retilínea sobre uma superfície plana e horizontal, como indica a figura abaixo.



- Suponha também que a partícula esteja em movimento.
- Nosso propósito é determinar uma função $x = x(t)$ que indique a posição da partícula num instante $t \geq 0$.
- Se tal função existe e possui "boas"propriedades, então sabemos por experiências nas disciplinas de cálculo que as funções $x'(t)$ e $x''(t)$ indicam a velocidade e a aceleração, respectivamente, da partícula em cada instante t.

- Considere que neste sistema existam uma força de atrito F_a entre a superfície e a partícula descrita por $F_a(t) = -\eta x'(t)$, sendo $\eta \geq 0$ o coeficiente de atrito independente do tempo e também uma força externa F_e, dependente do tempo. Suponha que $k > 0$ seja a constante da mola.

- Considere que neste sistema existam uma força de atrito F_a entre a superfície e a partícula descrita por $F_a(t) = -\eta x'(t)$, sendo $\eta \geq 0$ o coeficiente de atrito independente do tempo e também uma força externa F_e, dependente do tempo. Suponha que $k > 0$ seja a constante da mola.
- Nestas condições podemos combinar a **Segunda Lei de Newton** com a **Lei de Hooke** para mostrar que a função $x = x(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária:

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \tag{1}$$

sendo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad a = \frac{\eta}{m} \geq 0 \text{ e } h(t) = \frac{F_e(t)}{m}.$$

- Considere que neste sistema existam uma força de atrito F_a entre a superfície e a partícula descrita por $F_a(t) = -\eta x'(t)$, sendo $\eta \geq 0$ o coeficiente de atrito independente do tempo e também uma força externa F_e, dependente do tempo. Suponha que $k > 0$ seja a constante da mola.
- Nestas condições podemos combinar a **Segunda Lei de Newton** com a **Lei de Hooke** para mostrar que a função $x = x(t)$ satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária:

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \tag{1}$$

sendo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad a = \frac{\eta}{m} \geq 0 \text{ e } h(t) = \frac{F_e(t)}{m}.$$

PROPOSTA:

- Fazer um estudo da equação (1) dividindo nos casos em que existe e não existe atrito entre a partícula e a superfície. (Por simplicidade, vamos supor $h = h(t) \equiv 0$).

Ausência de atrito

- Suponha então $\eta = 0$, de modo que a equação (1) se reduz a

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{2}$$

Ausência de atrito

- Suponha então $\eta = 0$, de modo que a equação (1) se reduz a
$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{2}$$
- Considere também as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

Ausência de atrito

- Suponha então $\eta = 0$, de modo que a equação (1) se reduz a

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{2}$$

- Considere também as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

Temos então o P.V.I.

$$\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

cuja única solução é

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t).$$

- Podemos observar graficamente como se comportam simultaneamente tais funções, no seguinte sentido: Defina $y(t) = x'(t)$, então temos a seguinte equação planar:

$$(x(t), y(t)) = x_0(\cos(\omega t), -\omega sen(\omega t)).$$

- Podemos observar graficamente como se comportam simultaneamente tais funções, no seguinte sentido: Defina $y(t) = x'(t)$, então temos a seguinte equação planar:

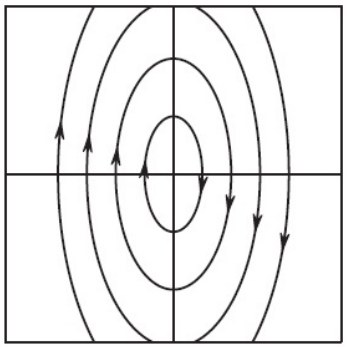
$$(x(t), y(t)) = x_0(\cos(\omega t), -\omega sen(\omega t)).$$

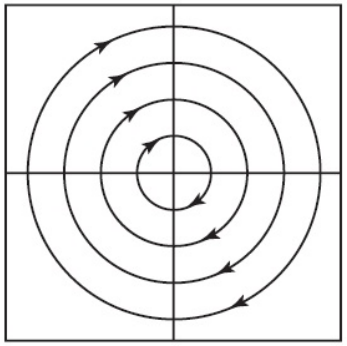
- Considerando agora a norma Euclidiana em $\mathbb{R}^2$, temos para cada $t \geq 0$:

$$\|(x(t), y(t))\|^2 = x_0^2[\cos^2(\omega t) + \omega^2 sen^2(\omega t)].$$

ASSIM:

- Temos uma **trajetória** elíptica, em particular para $\omega = 1$ temos uma circunferência. Observe que independentemente da escolha das condições iniciais podemos obter as mesmas conclusões e então obter o **retrato de fase** determinado pela figura:





Na presença de atrito

- Suponha agora $\eta > 0$ e que $0 < a < \omega$. Assim, a equação (1) se reduz a

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{4}$$

Na presença de atrito

- Suponha agora $\eta > 0$ e que $0 < a < \omega$. Assim, a equação (1) se reduz a
$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{4}$$
- Considere também as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

Na presença de atrito

- Suponha agora $\eta > 0$ e que $0 < a < \omega$. Assim, a equação (1) se reduz a

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{4}$$

- Considere também as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$.

Temos então o P.V.I.

$$\begin{cases} x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = 0., \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = 0, \end{cases}, \tag{5}$$

cuja única solução é

$$x(t) = e^{-at} x_0 \cos(\omega t).$$

- Definindo então $y(t) = x'(t)$, segue que
$$(x(t), y(t)) = e^{-at}x_0(\cos(\omega t), -a\cos(\omega t) - \omega sen(\omega t)).$$

- Definindo então $y(t) = x'(t)$, segue que
$$(x(t), y(t)) = e^{-at} x_0 (\cos(\omega t), -a\cos(\omega t) - \omega sen(\omega t)).$$
- Neste caso,
$$||(x(t), y(t))||^2 = e^{-2at} x_0^2 [(1 + a^2)\cos^2(\omega t) + \omega^2 sen^2(\omega t) + a\omega sen(\omega t)],$$

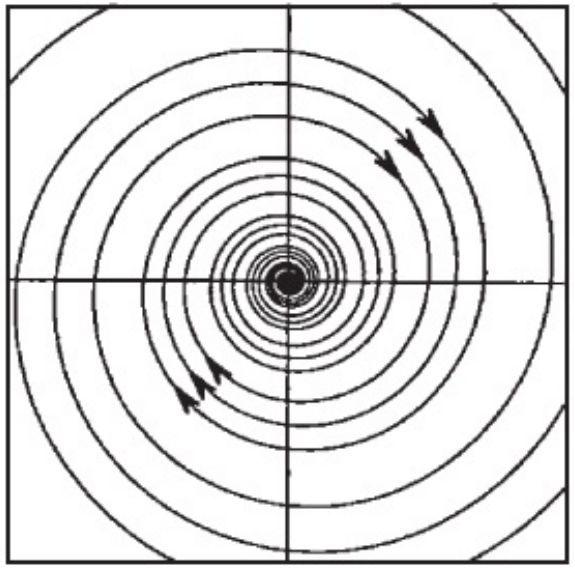
donde
$$\lim_{t \to \infty} ||(x(t), y(t))|| = 0$$

- Definindo então $y(t) = x'(t)$, segue que
$$(x(t), y(t)) = e^{-at}x_0(\cos(\omega t), -a\cos(\omega t) - \omega sen(\omega t)).$$
- Neste caso,
$$||(x(t), y(t))||^2 = e^{-2at}x_0^2[(1+a^2)\cos^2(\omega t) + \omega^2 sen^2(\omega t) + a\omega sen(\omega t)],$$

donde
$$\lim_{t\to\infty} ||(x(t), y(t))|| = 0$$

ASSIM:

- Assim, temos **trajetórias** em espirais que convergem para zero, sendo que o **retrato de fase** é determinado pela figura:



Sistemas de equações diferenciais

- Note que a equação
$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \tag{6}$$
equivale ao sistema
$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -2ay(t) - \omega^2 x(t) + h(t) \end{cases},$$
com $y(t) = x'(t)$. Ou ainda,
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Sistemas de equações diferenciais

- Note que a equação
$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \tag{6}$$
equivale ao sistema
$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -2ay(t) - \omega^2 x(t) + h(t) \end{cases},$$
com $y(t) = x'(t)$. Ou ainda,
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$
- Assim, as discussões sobre a equação diferencial (6) recaem sobre propriedades da matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix}.$$

Sistemas de equações diferenciais

- Note que a equação
$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t), \tag{6}$$
equivale ao sistema
$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = -2ay(t) - \omega^2 x(t) + h(t) \end{cases},$$
com $y(t) = x'(t)$. Ou ainda,
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h(t) \end{pmatrix}. \tag{7}$$
- Assim, as discussões sobre a equação diferencial (6) recaem sobre propriedades da matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix}.$$
- De fato, o relevante será a configuração do autovalores de A.