CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

DEFINIÇÃO

Um produto interno sobre um $\mathbb{R}$-espaço vetorial é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ u, v, w \in V.$

(b) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall\, u, v \in V.$

(c) $\langle u, u \rangle \geq 0$, valendo a igualdade apenas para $u = 0$.

DEFINIÇÃO

Um produto interno sobre um $\mathbb{R}$-espaço vetorial é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ u, v, w \in V.$

(b) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall\, u, v \in V.$

(c) $\langle u, u \rangle \geq 0$, valendo a igualdade apenas para $u = 0$.

- O par $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de espaço com produto interno.
- Um produto interno é muitas vazes chamado de produto escalar.

Definição

Um produto interno sobre um $\mathbb{R}$-espaço vetorial é uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\langle \alpha u + v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ u, v, w \in V$.

(b) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \forall\, u, v \in V$.

(c) $\langle u, u\rangle \geq 0$, valendo a igualdade apenas para $u = 0$.

- O par $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de espaço com produto interno.
- Um produto interno é muitas vazes chamado de produto escalar.

Observação

- $\langle 0, v\rangle$, para todo $v \in V$.
- $\langle w, \alpha u + v\rangle = \alpha\langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ u, v, w \in V$.

Observação: O caso complexo

Observação

Um produto interno sobre um $\mathbb{C}$-espaço vetorial é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{C},\ u, v, w \in V.$

Observação

Um produto interno sobre um $\mathbb{C}$-espaço vetorial é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{C},\ u, v, w \in V.$

(b) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \forall\, u, v \in V.$

Observação

Um produto interno sobre um $\mathbb{C}$-espaço vetorial é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{C},\ u, v, w \in V.$

(b) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \forall\, u, v \in V.$

(c) $\langle u, u \rangle \geq 0$, valendo a igualdade apenas para $u = 0$.

EXEMPLOS

- Em $\mathbb{R}^n$ temos o produto interno Euclidiano

$$\langle u, u\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j,$$

sendo $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $u = (v_1, \ldots, v_n)$.

EXEMPLOS

- Em $\mathbb{R}^n$ temos o produto interno Euclidiano

$$\langle u, u \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j,$$

sendo $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $u = (v_1, \ldots, v_n)$.

- Em $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ temos o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

EXEMPLOS

- Em $\mathbb{R}^n$ temos o produto interno Euclidiano

$$\langle u, u \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j,$$

  sendo $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $u = (v_1, \ldots, v_n)$.

- Em $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ temos o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

- Em $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ temos o produto interno

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$$

Observação

Um espaço vetorial pode admitir diversos produtos internos. Por exemplo:

- Em $\mathbb{R}^n$ temos também

$$\langle u, u \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j v_j}{j},$$

sendo $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $u = (v_1, \ldots, v_n)$.

Observação

Um espaço vetorial pode admitir diversos produtos internos. Por exemplo:

- Em $\mathbb{R}^n$ temos também
$$\langle u, u \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j v_j}{j},$$
sendo $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $u = (v_1, \ldots, v_n)$.
- Em $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$:
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Observação

Um espaço vetorial pode admitir diversos produtos internos. Por exemplo:

- Em $\mathbb{R}^n$ temos também
$$\langle u, u \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j v_j}{j},$$
sendo $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $u = (v_1, \ldots, v_n)$.
- Em $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$:
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx.$$
- Em $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$:
$$\langle A, B \rangle = tr(B^t A).$$

Definição

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno.

(a) Dois vetores $u, v \in V$ são ditos ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$, e usualmente escrevemos $u \perp v$.

DEFINIÇÃO

Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno.

(a) Dois vetores $u, v \in V$ são ditos ortogonais se $\langle u, v\rangle = 0$, e usualmente escrevemos $u \perp v$.

(b) Um conjunto $S \subset V$ é dito ortogonal se $\langle u, v\rangle = 0$, para todo $u \neq v$.

Definição

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno.

(a) Dois vetores $u, v \in V$ são ditos ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$, e usualmente escrevemos $u \perp v$.

(b) Um conjunto $S \subset V$ é dito ortogonal se $\langle u, v \rangle = 0$, para todo $u \neq v$.

(c) O complemento ortogonal de um conjunto $A \subset V$ é o conjunto

$$A^{\perp} = \{v \in V; v \perp u,\ \forall u \in A\}.$$

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$, com o produto interno Euclidiano, temos que o conjunto $S = \{e_1, \ldots, e_k\}$ é ortogonal.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$, com o produto interno Euclidiano, temos que o conjunto $S = \{e_1, \ldots, e_k\}$ é ortogonal.
- Em qualquer espaço com produto interno temos $\{0\}^\perp = V$.

EXEMPLOS

- Em $\mathbb{R}^n$, com o produto interno Euclidiano, temos que o conjunto $S = \{e_1, \ldots, e_k\}$ é ortogonal.
- Em qualquer espaço com produto interno temos $\{0\}^\perp = V$.
- As funções seno e cosseno são ortogonais em $\mathscr{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

Proposição 1

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno.

Proposição 1

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno.

(a) Se $S \subset V$, então $S^{\perp}$ é um subespaço vetorial de V.

Proposição 1

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno.

(a) Se $S \subset V$, então $S^\perp$ é um subespaço vetorial de V.

(b) Todo conjunto ortogonal que não contém o vetor nulo é linearmente independente.

Proposição 1

Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno.

(a) Se $S \subset V$, então $S^\perp$ é um subespaço vetorial de V.

(b) Todo conjunto ortogonal que não contém o vetor nulo é linearmente independente.

(c) $v \perp u$, para todo $u \in V$, se e somente se, $v = 0$.

Definição

Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno. Para cada $v \in V$ defini-se o número, chamado de norma de v,

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Definição

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno. Para cada $v \in V$ defini-se o número, chamado de norma de v,
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Teorema 1

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno. São válidas as seguintes propriedades.

(a) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $v \in V$.

Definição

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno. Para cada $v \in V$ defini-se o número, chamado de norma de v,

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Teorema 1

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno. São válidas as seguintes propriedades.

(a) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $v \in V$.

(b) $\|v\| \geq 0$, valendo a igualdade se, e somente se, $v = 0$.

Definição

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno. Para cada $v \in V$ defini-se o número, chamado de norma de v,

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Teorema 1

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno. São válidas as seguintes propriedades.

(a) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $v \in V$.

(b) $\|v\| \geq 0$, valendo a igualdade se, e somente se, $v = 0$.

(c) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$, para todo $u, v \in V$. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).

Definição

Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno. Para cada $v \in V$ defini-se o número, chamado de norma de v,

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Teorema 1

Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno. São válidas as seguintes propriedades.

(a) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $v \in V$.

(b) $\|v\| \geq 0$, valendo a igualdade se, e somente se, $v = 0$.

(c) $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$, para todo $u, v \in V$. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).

(d) $\|u + v\| \leq \|u\|\|v\|$, para todo $u, v \in V$. (Desigualdade de triangular).

Definição

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno. O Ângulo entre dois vetores não nulos u e v é definido como sendo

$$\angle(u, v) = arcocos\left(\frac{\langle u, v \rangle}{||u|| ||v||}\right)$$

Definição

Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno. O Ângulo entre dois vetores não nulos u e v é definido como sendo

$$\angle(u,v) = arcocos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{||u||\,||v||}\right)$$

Observação

Se u e v são não nulos, então $u \perp v \Leftrightarrow \angle(u,v) = \pi/2$.