CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

DEFINIÇÃO

Um produto interno sobre um $\mathbb{R}$-espaço vetorial é uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\langle \alpha u + v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ u, v, w \in V.$

(b) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \forall\, u, v \in V.$

(c) $\langle u, u\rangle \geq 0$, valendo a igualdade apenas para $u = 0$.

- O par $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de espaço com produto interno.
- Um produto interno é muitas vazes chamado de produto escalar.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$ temos o produto interno Euclidiano

$$\langle u, u \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j,$$

sendo $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $u = (v_1, \ldots, v_n)$.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^n$ temos o produto interno Euclidiano

$$\langle u, u \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j,$$

sendo $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $u = (v_1, \ldots, v_n)$.

- Em $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ temos o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

EXEMPLOS

- Em $\mathbb{R}^n$ temos o produto interno Euclidiano
$$\langle u, u\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j,$$
sendo $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $u = (v_1, \ldots, v_n)$.
- Em $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ temos o produto interno
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$
- Em $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ temos o produto interno
$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$$

DEFINIÇÃO

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno.

(a) Dois vetores $u, v \in V$ são ditos ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$, e usualmente escrevemos $u \perp v$.

DEFINIÇÃO

Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno.

(a) Dois vetores $u, v \in V$ são ditos ortogonais se $\langle u, v\rangle = 0$, e usualmente escrevemos $u \perp v$.

(b) Um conjunto $S \subset V$ é dito ortogonal se $\langle u, v\rangle = 0$, para todo $u \neq v$.

DEFINIÇÃO

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno.

(a) Dois vetores $u, v \in V$ são ditos ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$, e usualmente escrevemos $u \perp v$.

(b) Um conjunto $S \subset V$ é dito ortogonal se $\langle u, v \rangle = 0$, para todo $u \neq v$.

(c) O complemento ortogonal de um conjunto $A \subset V$ é o conjunto

$$A^{\perp} = \{v \in V; v \perp u, \ \forall u \in A\}.$$

Definição

Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno. Para cada $v \in V$ defini-se o número, chamado de norma de v,

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Teorema 1

Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno. São válidas as seguintes propriedades.

(a) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $v \in V$.

(b) $\|v\| \geq 0$, valendo a igualdade se, e somente se, $v = 0$.

(c) $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$, para todo $u, v \in V$. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).

(d) $\|u + v\| \leq \|u\|\|v\|$, para todo $u, v \in V$. (Desigualdade de triangular).

Distância

Definição

Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno. Defini-se então a função distância $d : V \times V \to \mathbb{R}$ pondo

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$$

Definição

Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno. Defini-se então a função distância $d : V \times V \to \mathbb{R}$ pondo

$$d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$$

Teorema 2

Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno. São válidas as seguintes propriedades.

(a) $d(u,v) \geq 0$, para todo $u, v \in V$, valendo a igualdade se, e somente se, $v = u$.

(b) $d(u,v) = d(v,u)$, para todo $u, v \in V$.

(c) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$, para todo $u, v, w \in V$.

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^4$, temos para $u = (1,1,3,2)$ e $v = (2,2,1,0)$ que

$$d(u,v) = \sqrt{10}.$$

Exemplos

- Em $\mathbb{R}^4$, temos para $u = (1,1,3,2)$ e $v = (2,2,1,0)$ que
$$d(u,v) = \sqrt{10}.$$

- Em $\mathscr{C}([0,2\pi];\mathbb{R})$, temos para $u = sen(x)$ e $v = cos(x)$ que
$$d(u,v) = \sqrt{2\pi}.$$

Ortonormalidade

Definição

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno.

(a) Dois vetores $u, v \in V$ são ditos ortonormais se $u \perp v$ e $\|u\| = \|v\| = 1$.

(b) Um conjunto $S \subset V$ é dito ortonormal se

$$\langle u, v \rangle = \begin{cases} 0, & u \neq v \\ 1, & u = v. \end{cases}$$

DEFINIÇÃO

Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno.

(a) Dois vetores $u, v \in V$ são ditos ortonormais se $u \perp v$ e $\|u\| = \|v\| = 1$.

(b) Um conjunto $S \subset V$ é dito ortonormal se

$$\langle u, v\rangle = \begin{cases} 0, & u \neq v \\ 1, & u = v. \end{cases}$$

EXEMPLOS

(a) A base canônica de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto ortonormal

DEFINIÇÃO

Seja $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno.

(a) Dois vetores $u, v \in V$ são ditos ortonormais se $u \perp v$ e $\|u\| = \|v\| = 1$.

(b) Um conjunto $S \subset V$ é dito ortonormal se

$$\langle u, v\rangle = \begin{cases} 0, & u \neq v \\ 1, & u = v. \end{cases}$$

EXEMPLOS

(a) A base canônica de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto ortonormal

(b) As funções

$$f(x) = \frac{1}{\pi} sen(x) \text{ e } g(x) = \frac{1}{\pi} cos(x)$$

formam um conjunto ortonormal em $\mathscr{C}([0, 2\pi]; \mathbb{R})$.

Proposição 1

Todo conjunto ortonormal é linearmente independente.

Proposição 1

Todo conjunto ortonormal é linearmente independente.

Observação

- Note que se $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ é um conjunto ortogonal que não contém o vetor nulo, então
$$\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \ldots, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\}.$$
- Uma base é dita ortonormal se for um conjunto ortonormal.

Proposição 2

Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto ortogonal que não contém o vetor nulo. Nestas condições, se $v \in Ger\{v_1, \ldots, v_n\}$, então

$$v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j.$$

Proposição 2

Sejam $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto ortogonal que não contém o vetor nulo. Nestas condições, se $v \in Ger\{v_1, \dots, v_n\}$, então

$$v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, v_j\rangle}{\|v_j\|^2} v_j.$$

Corolário

Sejam $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno de dimensão n e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal. Nestas condições, para cada $v \in V$ vale que

$$v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j\rangle v_j.$$

Proposição 2

Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto ortogonal que não contém o vetor nulo. Nestas condições, se $v \in Ger\{v_1, \ldots, v_n\}$, então

$$v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j.$$

Corolário

Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno de dimensão n e $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal. Nestas condições, para cada $v \in V$ vale que

$$v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j \rangle v_j.$$

Exemplo

Determinar as coordenadas do vetor $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ com respeito a base

$$\beta = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}.$$

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

- Sejam $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno $\mathscr{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto linearmente independente.

- Sejam $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno $\mathscr{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto linearmente independente.

Objetivo

Obter um conjunto ortogonal $\mathscr{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ tal que $Ger(\mathscr{A}) = Ger(\mathscr{B})$.

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

- Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno $\mathscr{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto linearmente independente.

Objetivo

Obter um conjunto ortogonal $\mathscr{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ tal que $Ger(\mathscr{A}) = Ger(\mathscr{B})$.

Ideia

- Defina $w_1 = v_1$ e

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

Deste modo, $\{w_1, w_2\}$ é ortogonal.

- Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno $\mathscr{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto linearmente independente.

Objetivo

Obter um conjunto ortogonal $\mathscr{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ tal que $Ger(\mathscr{A}) = Ger(\mathscr{B})$.

Ideia

- Defina $w_1 = v_1$ e
$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$
Deste modo, $\{w_1, w_2\}$ é ortogonal.
- Definidos $w_1, \ldots, w_k$, $1 < k < n$, pomos
$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j.$$

TEOREMA

Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno de dimensão finita. Então, V possui uma base ortonormal.

O PRODUTO INTERNO

Se $\mathscr{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V, então

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j,$$

sendo

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \ \text{ e } \ v = \sum_{i=j}^{n} \beta_j v_j.$$

O PRODUTO INTERNO

Se $\mathscr{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V, então

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j,$$

sendo

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \ \text{ e } \ v = \sum_{i=j}^{n} \beta_j v_j.$$

MUDANÇA DE BASE

Se $\mathscr{A} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathscr{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ são duas bases ortonormais de V, então a matriz mudança de base M satisfaz

$$M \cdot M^t = M^t \cdot M = I.$$

- Obter uma base ortonormal de

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y = 0\}$$

Começando com $\mathscr{A} = \{(2,1,0),(0,0,1)\}$ teremos

$$\mathscr{B} = \left\{(2,1,0), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)\right\}.$$

Exemplos

- Obter uma base ortonormal de
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y = 0\}$$
Começando com $\mathscr{A} = \{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ teremos
$$\mathscr{B} = \left\{(2, 1, 0), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)\right\}.$$
- Obter uma base ortonormal de $\mathscr{P}_2$, considerando o produto interno
$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$
Começando com $\mathscr{A} = \{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ teremos
$$\mathscr{B} = \{1, \sqrt{3}(2x - 1), \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)\}.$$