CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Espaços vetoriais

Definição

Un conjunto vazio V é dito um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ se existem duas operações

$$+ : V \times V \to V \;\text{ e }\; \cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

Espaços vetoriais

Definição

Un conjunto vazio V é dito um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ se existem duas operações

$$+ : V \times V \to V \text{ e } \cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

(A1) $u + v = v + u, \ \forall u, v \in V$.

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w), \ \forall u, v, w \in V$.

(A3) Existe um elemento $0 \in V$ tal que $v + 0 = v, \ \forall v \in V$.

(A4) Para cada $v \in V$, existe $u \in V$ tal que $v + u = 0$.

Espaços vetoriais

Definição

Un conjunto vazio V é dito um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ se existem duas operações

$$+ : V \times V \to V \;\text{ e }\; \cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

($A1$) $u + v = v + u,\ \forall u, v \in V$.

($A2$) $(u + v) + w = u + (v + w),\ \forall u, v, w \in V$.

($A3$) Existe um elemento $0 \in V$ tal que $v + 0 = v,\ \forall v \in V$.

($A4$) Para cada $v \in V$, existe $u \in V$ tal que $v + u = 0$.

($M1$) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot V),\ \forall \alpha.\beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$.

($M2$) $1 \cdot v = v,\ \forall v \in V$, sendo 1 a identidade de $\mathbb{K}$.

Espaços vetoriais

Definição

Un conjunto vazio V é dito um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ se existem duas operações

$$+ : V \times V \to V \;\text{ e }\; \cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

$(A1)$ $u + v = v + u, \;\forall u, v \in V.$

$(A2)$ $(u + v) + w = u + (v + w), \;\forall u, v, w \in V.$

$(A3)$ Existe um elemento $0 \in V$ tal que $v + 0 = v, \;\forall v \in V.$

$(A4)$ Para cada $v \in V$, existe $u \in V$ tal que $v + u = 0.$

$(M1)$ $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot V), \;\forall \alpha.\beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V.$

$(M2)$ $1 \cdot v = v, \;\forall v \in V$, sendo 1 a identidade de $\mathbb{K}$.

$(D1)$ $\alpha \cdot (v + u) \cdot u = \alpha \cdot v + \beta \cdot u, \;\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}.$

(D2) $(\alpha + \beta) \cdot v \cdot u = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \;\forall u \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$

Observações

Observações

- Um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é muitas vezes chamado de $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Observações

- Um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é muitas vezes chamado de $\mathbb{K}$-espaço vetorial.
- Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.

Observações

- Um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é muitas vezes chamado de $\mathbb{K}$-espaço vetorial.
- Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.

Observações

- Um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é muitas vezes chamado de $\mathbb{K}$-espaço vetorial.
- Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.
- O vetor 0 em (A3) *é único* e é chamado de *vetor nulo.*

Observações

- Um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é muitas vezes chamado de $\mathbb{K}$-espaço vetorial.
- Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.
- O vetor 0 em (A3) *é único* e é chamado de *vetor nulo.*
- O vetor u em (A4) é único o e denotado por $(-v)$.

Observações

- Um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é muitas vezes chamado de $\mathbb{K}$-espaço vetorial.
- Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.
- O vetor 0 em (A3) *é único* e é chamado de *vetor nulo.*
- O vetor u em (A4) é único o e denotado por $(-v)$.
- Se 0 é o nulo em $\mathbb{K}$, então $0 \cdot v = 0$.

Observações

- Um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é muitas vezes chamado de $\mathbb{K}$-espaço vetorial.
- Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.
- O vetor 0 em (A3) *é único* e é chamado de *vetor nulo.*
- O vetor u em (A4) é único o e denotado por $(-v)$.
- Se 0 é o nulo em $\mathbb{K}$, então $0 \cdot v = 0$.
- $(-1) \cdot v = -v$, para todo $v \in V$.

Observações

- Um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é muitas vezes chamado de $\mathbb{K}$-espaço vetorial.
- Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.
- O vetor 0 em (A3) *é único* e é chamado de *vetor nulo.*
- O vetor u em (A4) é único o e denotado por $(-v)$.
- Se 0 é o nulo em $\mathbb{K}$, então $0 \cdot v = 0$.
- $(-1) \cdot v = -v$, para todo $v \in V$.
- Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, temos $\lambda \cdot 0 = 0$, sendo 0 o vetor nulo.

Observações

- Um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é muitas vezes chamado de $\mathbb{K}$-espaço vetorial.
- Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.
- O vetor 0 em (A3) *é único* e é chamado de *vetor nulo.*
- O vetor u em (A4) é único o e denotado por $(-v)$.
- Se 0 é o nulo em $\mathbb{K}$, então $0 \cdot v = 0$.
- $(-1) \cdot v = -v$, para todo $v \in V$.
- Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, temos $\lambda \cdot 0 = 0$, sendo 0 o vetor nulo.
- Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v \in V$ são tais que $\lambda \cdot v = 0$, então um deles deve ser nulo.

Observações

- Um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ é muitas vezes chamado de $\mathbb{K}$-espaço vetorial.
- Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial é $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$.
- Os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*.
- O vetor 0 em (A3) *é único* e é chamado de *vetor nulo.*
- O vetor u em (A4) é único o e denotado por $(-v)$.
- Se 0 é o nulo em $\mathbb{K}$, então $0 \cdot v = 0$.
- $(-1) \cdot v = -v$, para todo $v \in V$.
- Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, temos $\lambda \cdot 0 = 0$, sendo 0 o vetor nulo.
- Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $v \in V$ são tais que $\lambda \cdot v = 0$, então um deles deve ser nulo.
- Em geral, trataremos apenas os casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exemplos

Exemplo 1

Todo corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial.

Exemplos

Exemplo 1

Todo corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial.

Exemplo 2

Dados um corpo $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$V = \mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}.$$

Dados $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$ define

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Exemplos

Exemplo 1

Todo corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial.

Exemplo 2

Dados um corpo $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$V = \mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}.$$

Dados $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$ define

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Exemplo 3

Considere o conjunto de polinômios

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}) = \{p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_j \in \mathbb{K},\ n \geq 0\}.$$

Então, $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial considerando a soma e produto usuais.

Exemplos

Exemplo 4

O conjunto das matrizes $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$ com as operações usuais.

Exemplos

Exemplo 4

O conjunto das matrizes $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{K})$ com as operações usuais.

Exemplo 5

O conjunto das soluções do sistema homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com respeito a soma e o produto de $\mathbb{K}^n$.

Exemplo: espaço de funções

Considere X um conjunto não vazio qualquer, $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathscr{F}(X;\mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$.

Exemplo: espaço de funções

Considere X um conjunto não vazio qualquer, $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathscr{F}(X;\mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$.

- para cada par $f, g \in \mathscr{F}(X;\mathbb{K})$, defina a função

$$f+g : X \to \mathbb{K}, \ \text{ pondo } \ (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Exemplo: espaço de funções

Considere X um conjunto não vazio qualquer, $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathscr{F}(X;\mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$.

- para cada par $f, g \in \mathscr{F}(X;\mathbb{K})$, defina a função

$$f+g : X \to \mathbb{K}, \text{ pondo } (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

- para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathscr{F}(X;\mathbb{K})$, defina a função

$$\lambda \cdot f : X \to \mathbb{K}, \text{ pondo } (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Exemplo: espaço de funções

Considere X um conjunto não vazio qualquer, $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathscr{F}(X;\mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$.

- para cada par $f, g \in \mathscr{F}(X;\mathbb{K})$, defina a função

$$f + g : X \to \mathbb{K}, \text{ pondo } (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

- para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathscr{F}(X;\mathbb{K})$, defina a função

$$\lambda \cdot f : X \to \mathbb{K}, \text{ pondo } (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Assim, $\mathscr{F}(X;\mathbb{K})$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Exemplo: espaço de funções

Considere X um conjunto não vazio qualquer, $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathscr{F}(X;\mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$.

- para cada par $f, g \in \mathscr{F}(X;\mathbb{K})$, defina a função

$$f + g : X \to \mathbb{K}, \ \text{ pondo } \ (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

- para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathscr{F}(X;\mathbb{K})$, defina a função

$$\lambda \cdot f : X \to \mathbb{K}, \ \text{ pondo } \ (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Assim, $\mathscr{F}(X;\mathbb{K})$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Importante

O vetor nulo de $\mathscr{F}(X;\mathbb{K})$ é a função identicamente nula, isto é,

$$0(x) = 0, \ \forall x \in X.$$

Combinação linear

Definição

Um vetor $v \in V$ é dito uma combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_n$ se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$ tais que

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j.$$

Conjuntos linearmente independentes

Conjuntos linearmente independentes

Definição

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de vetores em V. Dizemos que A é um conjunto **linearmente independente** se

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Conjuntos linearmente independentes

Definição

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de vetores em V. Dizemos que A é um conjunto **linearmente independente** se

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Definição

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto de vetores em V. Dizemos que A é um conjunto **linearmente dependente** se for possível obter escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ em $\mathbb{K}$, **não todos nulos** tais que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0.$$