CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Definição

Um produto interno sobre um $\mathbb{R}$-espaço vetorial é uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\langle \alpha u + v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ u, v, w \in V.$

(b) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \forall\, u, v \in V.$

(c) $\langle u, u\rangle \geq 0$, valendo a igualdade apenas para $u = 0$.

- O par $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ de espaço com produto interno.
- Um produto interno é muitas vazes chamado de produto escalar.

Projeção ortogonal

Definição

Sejam x, y dois vetores não nulos em $\mathbb{R}^2$.

- A projeção escalar de x sobre y é o número

$$\alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$$

- A projeção ortogonal de x sobre y é o vetor

$$p = \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2} y$$

Exemplo

Determinar o vetor sobre a reta $W = \{(x, y);\ y = 1/3x\}$ mais próximo do vetor $v = (1, 4)$.

Teorema

Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno e $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto ortogonal que não contém o vetor nulo. Denotando $U = ger(S)$, temos que para qualquer $u \in V$, o vetor

$$v = u - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle u, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j$$

é ortogonal ao espaço U. Em particular, $v = 0$ se, e somente se, $u \in U$.

Definição

Nas condições do teorema, o vetor

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\langle u, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j$$

é chamado de projeção ortogonal de u sobre U.

Exemplo

Exemplo

Obter a projeção ortogonal de $u = (2, 3, 1)$ sobre

$$U = ger\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$$

TEOREMA

Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno de dimensão finita. Para todo subespaço W de V vale

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Operador auto-adjunto

Definição

Sejam $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno e $T \in \mathscr{L}(V)$. Dizemos que T é auto-adjunto se

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle, \ \forall u, v \in V.$$

Exemplo

O operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (ax + by, bx + cy)$$

é auto-adjunto.