CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

Projeção ortogonal

Teorema

Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno e $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ um conjunto ortogonal que não contém o vetor nulo. Denotando $U = ger(S)$, temos que para qualquer $u \in V$, o vetor

$$v = u - \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle u, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j$$

é ortogonal ao espaço U. Em particular, $v = 0$ se, e somente se, $u \in U$.

Definição

Nas condições do teorema, o vetor

$$proj_W(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle u, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j$$

é chamado de projeção ortogonal de u sobre U.

Operador auto-adjunto

Proposição

Sejam $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço com produto interno e W um subespaço de dimensão finita. Então, dado $v \in V$, existe um único $w \in W$ tal que $v - w \in W^{\perp}$.

Proposição

Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno e W um subespaço de dimensão finita. Então, dado $v \in V$, existe um único $w \in W$ tal que $v - w \in W^{\perp}$.

Teorema

Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno e W um subespaço de V e $v \in V$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Existe $w_0 \in W$ tal que $v - w_0 \in W^{\perp}$.

(b) Existe $w_0 \in W$ tal que

$$\|v - w_0\| < \|v - w\|, \ \forall w \in W, \ w \neq w_0.$$

Proposição

Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno e W um subespaço de dimensão finita. Então, dado $v \in V$, existe um único $w \in W$ tal que $v - w \in W^{\perp}$.

Teorema

Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno e W um subespaço de V e $v \in V$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Existe $w_0 \in W$ tal que $v - w_0 \in W^{\perp}$.

(b) Existe $w_0 \in W$ tal que

$$\|v - w_0\| < \|v - w\|, \ \forall w \in W, \ w \neq w_0.$$

Observação

(a) Se existe $proj(v)_W$, então este vetor é a melhor aproximação de v por um vetor de W.

(b) Se $dim W < \infty$, então determinar essa melhor aproximação equivale a obter a projeção.

O PROBLEMA

Considere um sistema incompatível

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

com $p > n$, isto é, maus equações do que incógnitas.

O PROBLEMA

Considere um sistema incompatível

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

com $p > n$, isto é, maus equações do que incógnitas.

- Sendo incompatível, então não existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que seja solução.

O problema

Considere um sistema incompatível

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

com $p > n$, isto é, maus equações do que incógnitas.

- Sendo incompatível, então não existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que seja solução.
- Ideia: Obter um vetor $Y \in \mathbb{R}^n$ que se aproxime de uma solução.

Aplicação: Mínimos quadrados

- Queremos então obter $Y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$||AY - b|| < ||Ax - b||, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ x \neq Y.$$

Aplicação: Mínimos quadrados

- Queremos então obter $Y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$||AY - b|| < ||Ax - b||, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ x \neq Y.$$

- Escrevendo $Y = (y_1, \ldots, y_n)$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{bmatrix}$$

e

$$A_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), \ A_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \ldots, A_2 = (a_{1p}, a_{2p}, \ldots, a_{np})$$

vemos que

$$AY = \sum_{i=1}^{n} y_i A_i,$$

ou seja,

$$AY \in W = ger\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}.$$

Projeção!

Desta forma, AY é então a projeção de b sobre o espaços W.

Projeção!

Desta forma, AY é então a projeção de b sobre o espaços W.

- Como determinar Y?

Projeção!

Desta forma, AY é então a projeção de b sobre o espaços W.

- Como determinar Y?

- Note que se AY é a projeção de b sobre W, então

$$b - AY \in W^{\perp},$$

ou seja,

$$\langle b, A_j \rangle = \langle AY, A_j \rangle, \ \forall j = 1, \ldots, m.$$

Projeção!

Desta forma, AY é então a projeção de b sobre o espaços W.

- Como determinar Y?

- Note que se AY é a projeção de b sobre W, então

$$b - AY \in W^{\perp},$$

ou seja,

$$\langle b, A_j \rangle = \langle AY, A_j \rangle, \ \forall j = 1, \ldots, m.$$

- Segue disto que Y é a solução o prolema

$$A^t AY = A^t b.$$

O problema

Obter a solução mais aproximada do sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - y = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Exemplo: Solução de sistema

O problema

Obter a solução mais aproximada do sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - y = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Aqui, temos:

$$A^tA = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } A^tb = \begin{bmatrix} 13 - 1 \end{bmatrix}$$

O PROBLEMA

Obter a reta em $\mathbb{R}^2$ que melhor se aproxima dos pontos

$$P_1 = (-1, -10),\ P_2 = (0, -6),\ P_3 = (1, -4)\ \text{ e }\ P_4 = (2, -2).$$

O problema

Obter a reta em $\mathbb{R}^2$ que melhor se aproxima dos pontos

$$P_1 = (-1, -10),\ P_2 = (0, -6),\ P_3 = (1, -4) \text{ e } P_4 = (2, -2).$$

Aqui, temos:

$$A^t A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } A^t b = \begin{bmatrix} 2 - 22 \end{bmatrix}$$