CMM 031
Álgebra Linear
S1 - 2025

Prof. Fernando de Ávila Silva
Dep. de Matemática - UFPR

DEFINIÇÃO

Uma equação quadrática, nas varáveis x, y, é uma equação da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \tag{1}$$

Associada a esta equação, temos a forma quadrática $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \langle (x,y), A(x,y) \rangle, \tag{2}$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO

Determinar qual é a quádrica definida pela equação

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$$

- Como não temos o termo xy, então basta completarmos quadrados!

PROBLEMA

Como trabalhar quando temos o termo xy?

Ideia

Note que o termo xy equivale a existência de uma rotação dos eixos! Assim, queremos obter uma matriz de rotação

$$Q = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

de tal forma que a mudança de variáveis

$$(x, y) = Q(\eta, \xi), \text{ ou equivalentemente, } (\eta, \xi) = Q^t(x, y)$$

nos leve a uma equação quadrática sem o termo $\eta\xi$.

Ideia

Note que o termo xy equivale a existência de uma rotação dos eixos! Assim, queremos obter uma matriz de rotação

$$Q = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

de tal forma que a mudança de variáveis

$$(x, y) = Q(\eta, \xi), \quad \text{ou equivalentemente, } (\eta, \xi) = Q^t(x, y)$$

nos leve a uma equação quadrática sem o termo $\eta\xi$.

- Note que neste caso, teremos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \langle (x, y), A(x, y) \rangle = \langle Q(\eta, \xi), AQ(\eta, \xi) \rangle \\ &= \langle (\eta, \xi), Q^t AQ(\eta, \xi) \rangle \end{aligned} \tag{3}$$

- Assim, não teremos o termo $\eta\xi$ se, e somente se, $Q^t AQ$ for diagonalizável.
- Como A é simétrica, então é diagonalizável e portanto $Q^t AQ$.

- Assim, sejam λ_1 e λ_2 autovalores de A e $v_1 = (w_1, w_2), v_2 = (z_1, z_2)$ respectivos autovetores (ortonormais).

- Assim, sejam λ_1 e λ_2 autovalores de A e $v_1 = (w_1, w_2)$, $v_2 = (z_1, z_2)$ respectivos autovetores (ortonormais).
- Definindo
$$Q = \begin{bmatrix} w_1 & z_1 \\ w_2 & z_2 \end{bmatrix}$$
obtemos
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \langle (x,y), A(x,y) \rangle = \langle Q(\eta,\xi), AQ(\eta,\xi) \rangle \\ &= \langle (\eta,\xi), Q^t AQ(\eta,\xi) \rangle \\ &= \lambda_1 \eta^2 + \lambda_2 \xi^2. \end{aligned}$$
- Finalmente, a equação quadrática (1) se torna
$$\lambda_1 \eta^2 + \lambda_2 \xi^2 + d'\eta + e'\xi + f = 0,$$
sendo $[d\ e]Q = (d', e')$.

Exemplos

Exemplo 1

$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0.$

Exemplo 2

$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 8\sqrt{2}y - 8 = 0.$